Санкт–Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
1998-1999 учебный год, первый заочный тур

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
ПЕРВЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТУР

1. Найдите частное $\dfrac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$.
2. Упростите $(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\ldots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n})$.
3. Упростите выражение

$$\left(\frac{63}{256}x^2-\frac{21}{128}x^4-\frac{21}{160}x^6+\frac{9}{80}x^8+\frac{1}{10}x^{10}\right)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+$$
$$+\left(\frac{63}{256}-\frac{63}{128}x^2+\frac{105}{160}x^4-\frac{63}{80}x^6+\frac{9}{10}x^8\right)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{63}{256}(1+x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}})(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}})^{-1}.$$

4. Решите уравнение $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{b}{x+b}+\dfrac{c}{x+c}=3$.
5. Решите уравнение $\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^2-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2\cdot\dfrac{x^2-a^2}{x^2-b^2}=0$.
6. Решите уравнение $x^3+(1-m^2)x+m=0$.
7. Решите уравнение $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{x+1}$.
8. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+kx+1=0$. Найдите все значения k, при которых справедливо неравенство $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2>1$.
9. Определите коэффициенты p и q из условия, что многочлен $6x^4-7x^3+px^2+3x+2$ делится без остатка на x^2-x+q.
10. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2-|y|=3,\\ 2y^2-|x|=3.\end{cases}$
11. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+y\sqrt{xy}=420,\\ y^2+x\sqrt{xy}=280.\end{cases}$
12. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=\sqrt[3]{a},\\ \sqrt[3]{x^2+y^2}+\sqrt[3]{x^2-y^2}=\sqrt[3]{a^2}.\end{cases}$
13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}2x+2(a-1)=a-4,\\ 2|1+x|+ay=2\end{cases}$ имеет единственное решение. Найдите это решение.
14. Решите систему уравнений $\begin{cases}x+y=3z,\\ x^2+y^2=5z,\\ x^3+y^3=9z.\end{cases}$

15. Решите систему уравнений $\begin{cases}(y+z)^2-x^2=a^2,\\(x+z)^2-y^2=b^2,\\(x+y)^2-z^2=c^2.\end{cases}$

16. Определите наибольшее значение выражения $\sigma=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, вычисленное для всех решений системы уравнений $\begin{cases}x-2y+3z=9,\\x^2+4y^2+9z^2=189,\\3xz=4y^2.\end{cases}$