Санкт–Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
2001-2002 учебный год, декабрь

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
ПЕРВЫЙ ОЧНЫЙ ТУР

1. Решите уравнение $\sqrt[n]{a^k x^{n-k}} + \sqrt[n]{x^k a^{n-k}} = 2\sqrt{bx}$, если $n > k > 0$ и $b > a > 0$.
2. Найдите радиус сферы R с центром в начале координат, если известно, что на ней лежат все решения системы уравнений $\begin{cases} x + y - z = 7, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 37, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 1. \end{cases}$
3. Построены четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник и так далее. Число диагоналей во всех многоугольниках равно 800. Сколько многоугольников построено?

   Примечание. Вам может потребоваться формула $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
4. Найдите сумму корней уравнения $x^2 + \frac{a^2x^2}{(x-a)^2} = k^2$.
5. Вычислите произведение $p = 1^{\frac{1}{1}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} \cdot 16^{\frac{1}{16}} \cdot \ldots$.
6. Используя найденное в задаче 5 значение p, решите уравнение $\sqrt[p]{17-x} + \sqrt[p]{15+x} = p - 1$.
7. Используя найденное в задаче 5 значение p, решите уравнение $x^2 + 2 = p\sqrt{x^3 + 1}$.

Санкт–Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
2001-2002 учебный год, январь

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВТОРОЙ ОЧНЫЙ ТУР

1. Число x в k раз больше разности чисел y и z, а число y в m раз больше разности x и z. Найдите зависимость k от m, если известно, что число z в два раза больше разности чисел x и y. Числа x, y, z не равны нулю.
2. Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} x^2 - x\dfrac{2+\sin 2}{2\cos 1} + \operatorname{tg} 1 \le 0, \\ 0 \le y \le \cos 1. \end{cases}$
3. Найдите значение выражения $Q = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b}$, если известно, что $a+b+c=7$, а $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b} = \dfrac{7}{10}$.
4. Найдите длину интервала, все точки которого удовлетворяют неравенству $|\, x - 2x^2 + 4x^3 + \ldots + (-2)^{n-1} x^n + \ldots | \le 1$.
5. Найдите вещественные корни уравнения $x^2 + 2ax + \dfrac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \dfrac{1}{16}}$, $0 < a < \dfrac{1}{4}$.
6. Решите систему уравнений $\begin{cases} p^4 - p^2 + q^4 - q^2 = 612, \\ p^2 + pq + q^2 = 39. \end{cases}$
7. В круге проведена хорда AB, пересекающая его диаметр DE в точке M и наклоненная к нему под углом φ. Дано, что $\dfrac{ME}{MA} = \dfrac{p}{q}$, значения p и q берутся из предыдущей задачи. Из точки B проведена хорда BC, перпендикулярная диаметру DE, и точка C соединена с точкой A. Найдите площадь треугольника ABC, если радиус круга равен R.

Санкт–Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
2001-2002 учебный год, март

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
ТРЕТИЙ ОЧНЫЙ ТУР

1. Стальную плитку размерами 73×19 обвели карандашом на бумаге. Опишите способ нахождения центра полученного прямоугольника, имея в распоряжении только эту плитку и карандаш.
2. Каково наименьшее число участников может быть в математическом кружке, если известно, что девочек в нем меньше 50%, но больше 40%?
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $x^2+y^2=2|x|+2|y|$.
4. Решите уравнение $\sum\limits_{k=1}^{1997}\dfrac{1}{\sin kx\sin(k+1)x}=0$.
5. Докажите, что $\sqrt{11\ldots11-2\ldots2}=3\ldots3$, где 1 повторяется $2n$ раз, а 2 и 3 — только n раз.
6. Пусть $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Вычислите сумму $f\left(\dfrac{1}{1997}\right)+f\left(\dfrac{2}{1997}\right)+f\left(\dfrac{3}{1997}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{1996}{1997}\right)$.
7. Упростите выражение $\overbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}}}^{n\text{ радикалов}}$.

Санкт–Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
2001-2002 учебный год, декабрь

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПЕРВЫЙ ОЧНЫЙ ТУР

Ответы

1. $\{0;\ (\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}\cdot a^{\frac{2k}{2k-n}};\ (\sqrt{b}+\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}\cdot a^{\frac{2k}{2k-n}}\}$.

2. $5\sqrt{13}$.

3. 15.

4. $2a$.

5. 4.

6. $\left\{1-\sqrt{256-\left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^4};\ 1+\sqrt{256-\left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^4}\right\}$.

7. $\{4+2\sqrt{3}-\sqrt{34+20\sqrt{3}};\ 4+2\sqrt{3}-\sqrt{34+20\sqrt{3}}\}$.

Санкт–Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
2001-2002 учебный год, январь

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ВТОРОЙ ОЧНЫЙ ТУР

Ответы

1. $\dfrac{1-2m}{m-2}$.

2. $1-\sin 1\cdot\cos 1$.

3. $\dfrac{19}{10}$.

4. $\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$; $\dfrac{5}{6}$.

5. $-a+\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{4a^2-4a+\dfrac{3}{4}}\right)$ и $-a+\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{4a^2-4a+\dfrac{3}{4}}\right)$.

6. $\{(5;\,2);\,(2;\,5);\,(-5;\,-2);\,(-2;\,-5)\}$.

7. $\dfrac{2p(p+q)R^2\cos^2\varphi\cdot\sin 2\varphi}{p^2+q^2+2pq\cos 2\varphi}$.

Санкт–Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
2001-2002 учебный год, март

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ТРЕТИЙ ОЧНЫЙ ТУР

Ответы

1. На длинных сторонах прямоугольника с помощью плитки от обоих краев откладываем отрезки длиной 19, соединяем их концы, проводя диагонали нового меньшего прямоугольника. Длиной стороны плитки хватает для того, чтобы провести эти диагонали, так как длина диагонали $\sqrt{35^2+19^2}>73$. Пересечение диагоналей есть центр исходного прямоугольника.
2. 7.
3. $4\pi+8$.
4. $\varnothing$.
6. 998.
7. $\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$.