

Санкт-Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
2003-2004 учебный год

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

1. Решите уравнение $x^8 - 4x^2 - 1 = 0$.
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^y = y^x, \\ 3^x = 15^y. \end{cases}$$
3. Постройте график функции $y(x) = |x| \cdot \left(\frac{x+3}{x^2-3x} + \frac{x-3}{x^2+3x} \right) \cdot \frac{9x^2-x^4}{x^2+9}$.
4. Найдите площадь фигуры, вершины которой имеют координаты, получаемые из решения системы уравнений
$$\begin{cases} x - \frac{2x+y}{x^2-y^2} = 1, \\ x + \frac{x+2y}{x^2-y^2} = -1. \end{cases}$$
5. Из вершины прямого угла треугольника опущен перпендикуляр на гипотенузу. Периметры образовавшихся при этом малых треугольников равны p_1 и p_2 . Найдите периметр большего треугольника.
6. Найдите площадь тени куба на плоскость его основания от источника, расположенного на продолжении диагонали куба на высоте $2a$. Ребро куба равно a .
7. Точки N и M делят соответственно стороны BC и CA треугольника ABC в следующих отношениях $\frac{BN}{NC} = p$, $\frac{CM}{AM} = q$. Пусть точка O — точка пересечения прямых AN и BM . Найдите отношение площади четырехугольника $ONCM$ к площади данного треугольника.