

Санкт–Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
2004-2005 учебный год

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

1. На координатной плоскости Oab изобразите все точки с координатами $(a; b)$, для каждой из которых неравенство $|x| + |y| \geq ax + by$ выполняется для всех действительных чисел x и y .
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{x^3 + 1}{y^2} + y^2 = 3 + 2x; \\ 3(\sqrt{x^2 + 1} - y + y^2) = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 1} - x}. \end{cases}$$
3. Решите неравенство $\log_{\pi}(\arccos x) \geq \log_{\arccos x} \pi$.
4. При всех значениях параметра a решите уравнение $\sqrt{a - x} + \sqrt{1 - x} = \sqrt{2x}$.
5. Докажите, что $\sin \frac{\pi}{7}$ не равен $\frac{2}{5}$.
6. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника лежит на окружности, вписанной в этот треугольник. Найдите отношение длины гипотенузы к радиусу вписанной окружности.
7. Шар касается всех ребер треугольной пирамиды $SABC$ и его центр лежит внутри пирамиды на высоте, проведенной из вершины S . Докажите, что $SABC$ — правильная треугольная пирамида.