

**Санкт–Петербургский государственный университет**  
факультет прикладной математики — процессов управления  
2008—2009 учебный год

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА**

1. На координатной плоскости  $Oxy$  изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $|y^2 - 1| + |y + 1| + |x| \leq 4$ .
2. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$
3. Решите уравнение  $\operatorname{arctg}(\sin 7x) - \operatorname{arctg}(\cos 4x) = 0$ .
4. Решите неравенство  $\frac{1 + \log_2(2 + x)}{x} < \frac{6}{2x + 1}$ .
5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^2 - 4x - 2|x - a| + 2 + a = 0$  имеет два корня?
6. В равнобедренный треугольник вписан один над другим два круга радиусов  $R$  и  $r$ , касающихся друг друга. Найдите косинус угла при вершине треугольника.
7. Центр шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, находится на расстоянии 4 см от боковой грани и на расстоянии 5 см от бокового ребра. Найдите объем шара.