

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 1996 год
базовые классы

Работа 1

Вариант 1

1. Решите уравнение $2\sin^2 2x - 11\sin 2x - 6 = 0$.
2. Решите неравенство $\log_2(x-2) \leq 3$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 0$ и $y = 1 - x^2$.
4. Исследуйте функцию $y = 6x^5 - 10x^3$ на монотонность и экстремумы и постройте ее график.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 6, \\ 2^{x+y} = 16. \end{cases}$$
6. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} y = |x - 2|, \\ y = ax + 1 \end{cases}$$
 имеет два решения?

Вариант 2

1. Решите уравнение $2\cos^2 2x - 9\cos 2x - 5 = 0$.
2. Решите неравенство $\log_3(x-3) \leq 2$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 0$ и $y = 4 - x^2$.
4. Исследуйте функцию $y = 5x^3 - 3x^5$ на монотонность и экстремумы и постройте ее график.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3^x - 3^y = 6, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases}$$
6. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} y = |x + 4|, \\ y = ax + 2 \end{cases}$$
 имеет два решения?

Вариант 1

1. Решите уравнение $x + 3\sqrt{x-5} = 5$.
2. Решите неравенство $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x-3) \geq -4$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \sin 2x - 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Найдите все значения x из условия: $\cos^2 2x - \sin^2 2x \leq -1$.
5. Дана функция $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2, & \text{если } x \geq -1. \end{cases}$ Вычислите $\int_{-2}^0 f(x) dx$.
6. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + (a^3 - 9a - 7)x + a^4 - 21a - 8 = 0$ равны 2 и 5?

Вариант 2

1. Решите уравнение $x + 2\sqrt{x-6} = 6$.
2. Решите неравенство $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(3x-2) \geq -2$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 2x + \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.
4. Найдите все значения x из условия: $\sin^2 3x - \cos^2 3x \leq -1$.
5. Дана функция $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{если } x < 1, \\ 1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$ Вычислите $\int_0^2 f(x) dx$.
6. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + (a^3 - 4a + 1)x + a^4 - 7a - 14 = 0$ равны 3 и -4?

Вариант 1

1. Решите уравнение $2\log_{\frac{1}{8}} x = \log_{\frac{1}{8}} (9 - 8x)$.
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$ и $y = 3 - x^2$.
3. Решите неравенство $9^{x-1} - 3^{x-2} - \frac{2}{3} \geq 0$.
4. Решите уравнение $\cos \frac{1}{x} \cdot \sin 2x = 4 \sin x \cos x$.
5. Представьте число 3 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма утроенного первого слагаемого и куба второго слагаемого была наименьшей.
6. При каких значениях параметра a уравнение $2^{(a-1)x^2 + 2(a+3)x + a} = \frac{1}{4}$ имеет единственный корень?

Вариант 2

1. Решите уравнение $2\log_{\frac{1}{7}} x = \log_{\frac{1}{7}} (11 - 10x)$.
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 3 - 2x^2$.
3. Решите неравенство $4^{x-1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2} \geq 0$.
4. Решите уравнение $6 \sin x \cos x + \sin 2x \sin \frac{2}{x} = 0$.
5. Представьте число 5 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение куба первого слагаемого на второе слагаемое было наибольшим.
6. При каких значениях параметра a уравнение $3^{(a+1)x^2 - 2(a-2)x + a} = 27$ имеет единственный корень?

Вариант 1

1. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 4) - \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) = -1$.
2. Найдите производную функции $f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} + \frac{x^2}{\pi}$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.
3. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{\log_7(2 - x)}$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = 4x - 4$ и $y = -4x - 4$.
5. При каких значениях k ось Ox касается кривой $y = x^2 - kx + 4$.
6. Найдите все пары чисел $(x; y)$, являющиеся решениями уравнения $2x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 1 = 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\log_4(x^2 - 6x + 16) - \log_4(x - 2) = 1$.
2. Найдите производную функции $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos \frac{\pi}{6} + \frac{x^2}{\pi}$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
3. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\log_6(x - 3)}$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 4$, $y = 4x$ и $y = -4x$.
5. При каких значениях k ось Ox касается кривой $y = x^2 + kx + 9$.
6. Найдите все пары чисел $(x; y)$, являющиеся решениями уравнения $2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0$.

Вариант 1

1. Решите неравенство $2^{\frac{\log_7(1+2x)}{10}} > 4$.
2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - x^3$, проходящей через точку графика с абсциссой $x_0 = -1$.
3. Решите уравнение $\sqrt{x^4 - 3x - 1} = x^2 - 1$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x$.
5. При каких значениях параметра a функция $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$ имеет единственную критическую (стационарную) точку?
6. Решите уравнение $\sin \frac{5\pi}{4}x = x^2 - 4x + 5$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $3^{\frac{\log_3\left(\frac{23}{10} - 2x\right)}{10}} > 9$.
2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 + x$, проходящей через точку графика с абсциссой $x_0 = 2$.
3. Решите уравнение $\sqrt{x^4 + x - 9} = x^2 - 1$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{3}x$.
5. При каких значениях параметра a функция $y = x^3 + 3ax^2 + 75x - 13$ имеет единственную критическую (стационарную) точку?
6. Решите уравнение $-\cos 7\pi x = x^2 - 6x + 10$.

Вариант 1

1. Решите уравнение $9^{x+1} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0$.
2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{2x-1} \geq -1$.
3. Решите уравнение $\sqrt{16-x^2} \cdot \sin x = 0$.
4. Используя геометрический смысл интеграла, вычислите $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.
5. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x$.
6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 4 \cdot 2^{3x} - 27 \cdot 2^{2x} + 24 \cdot 2^x$ на отрезке $[-2; 0]$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $2 \cdot 4^{x+1} + 15 \cdot 2^x - 2 = 0$.
2. Решите неравенство $\log_{\sqrt{2}} \frac{x-6}{2x+6} \leq 4$.
3. Решите уравнение $\sqrt{4-x^2} \cdot \cos x = 0$.
4. Используя геометрический смысл интеграла, вычислите $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$.
5. Найдите множество значений функции $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.
6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3^{3x} - 2 \cdot 3^{2x} + 3^x$ на отрезке $[-1; 1]$.

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_4(x-7) \leq \log_4(20-x) - 1$.
2. Решите уравнение $2\sin^2 x - 19\sin x - 10 = 0$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2^x$ и $y = -x + 3$, осями абсцисс и ординат.
4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 12x - x^3$ на отрезке $[-1; 3]$.
5. При каких значениях параметра a уравнение $2^{2x} - (a-3) \cdot 2^x - 3a = 0$ имеет решения?
6. Какие наименьшие значения может принимать выражение $x + 2y$, если известно, что
$$\begin{cases} x^2 + y + 2x = 9, \\ (x+y)^2 = 9? \end{cases}$$

Вариант 2

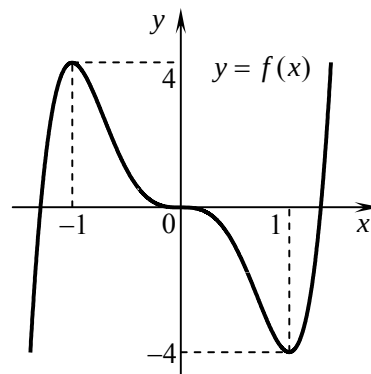
1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(2x-7) \leq \log_{\frac{1}{2}}(10-x) + 1$.
2. Решите уравнение $2\cos^2 x + 21\cos x + 10 = 0$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3^x$ и $y = -x + 4$, осями абсцисс и ординат.
4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2$ на отрезке $[0; 2]$.
5. При каких значениях параметра a уравнение $3^{2x} - (a-2) \cdot 3^x - 2a = 0$ имеет решения?
6. Какие наименьшие значения может принимать выражение $2x - y$, если известно, что
$$\begin{cases} 3x^2 + 3xy + x = 20, \\ x^2 - 4y^2 = 0? \end{cases}$$

Ответы к вариантам

Работа 1

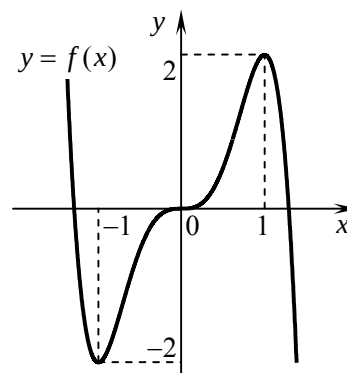
Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $(2; 10]$.
3. Ответ: $\frac{4}{3}$.
4. Ответ: см. рисунок.
5. Ответ: $\{(3; 1)\}$.
6. Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.



Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left\{\pm \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $(3; 12]$.
3. Ответ: $\frac{32}{3}$.
4. Ответ: см. рисунок.
5. Ответ: $\{(2; 1)\}$.
6. Ответ: $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.



Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\{5\}$.
2. Ответ: $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$.
3. Ответ: наименьшее значение: $-\frac{\pi}{2}$; наибольшее — $\frac{\pi}{2}$.
4. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $\frac{4}{3}$.
6. Ответ: $a = 3$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{6\}$.
2. Ответ: $\left[\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right]$.
3. Ответ: наименьшее значение: 1; наибольшее — $2\pi + 1$.
4. Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $\frac{8}{3}$.
6. Ответ: $a = 2$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\{1\}$.
2. Ответ: 4.
3. Ответ: $[1; +\infty)$.
4. Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$.
5. Ответ: $3 = 2 + 1$.
6. Ответ: $\{-2; 1; 2\}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{1\}$.
2. Ответ: 4.
3. Ответ: $[1; +\infty)$.
4. Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$.
5. Ответ: $5 = \frac{15}{4} + \frac{5}{4}$.
6. Ответ: $\{-1; 3; 5\}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\{2; 3\}$.
2. Ответ: $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Ответ: $D(y) = [-3; 1) \cup (1; 2)$.
4. Ответ: $\frac{16}{3}$.
5. Ответ: $\{-4; 4\}$.
6. Ответ: $\{(-1; -1)\}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{4; 6\}$.
2. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}$.
3. Ответ: $D(y) = (3; +\infty) \setminus \{4\}$.
4. Ответ: $\frac{16}{3}$.
5. Ответ: $\{-6; 6\}$.
6. Ответ: $\{(1; -1)\}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{51}{200}\right)$.
2. Ответ: $y = -5x - 3$.
3. Ответ: $\{2\}$.
4. Ответ: $\frac{4}{3}$.
5. Ответ: $\{-3; 3\}$.
6. Ответ: $\{2\}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left(\frac{221}{200}; \frac{23}{20}\right)$.
2. Ответ: $y = 13x - 16$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{5}{2}; 2\right\}$.
4. Ответ: $\frac{9}{2}$.
5. Ответ: $\{-5; 5\}$.
6. Ответ: $\{3\}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\{-2\}$.
2. Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{5}{7}; +\infty\right)$.
3. Ответ: $\{-4; -\pi; 0; \pi; 4\}$.
4. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.
5. Ответ: $D(y) = [-2; 2]$.
6. Ответ: наименьшее значение: 1; наибольшее значение — $\frac{23}{4}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{-3\}$.
2. Ответ: $\left(-\infty; -\frac{30}{7}\right] \cup (6; +\infty)$.
3. Ответ: $\left\{-2; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; 2\right\}$.
4. Ответ: π .
5. Ответ: $D(y) = [-2; 2]$.
6. Ответ: наименьшее значение: 0; наибольшее значение — 12.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left(7; \frac{48}{5}\right]$.
2. Ответ: $\left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $3 + \frac{1}{\ln 2}$.
4. Ответ: наименьшее значение: -11 ; наибольшее значение — 16 .
5. Ответ: $(0; +\infty)$.
6. Ответ: -18 .

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left[\frac{24}{5}; 10\right)$.
2. Ответ: $\left\{\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\frac{9}{2} + \frac{2}{\ln 3}$.
4. Ответ: наименьшее значение: -1 ; наибольшее значение — 8 .
5. Ответ: $(0; +\infty)$.
6. Ответ: -10 .