

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 1997 год
базовые классы

Работа 1

Вариант 1

1. Решите уравнение $\sqrt{3-2x} = 6+x$.
2. Найдите область определения функции $y = 3^{\sqrt{3-2x-x^2}}$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x}$, $y = 2x$, $x = 3$.
4. Решите уравнение $\log_2(\sin x) = \log_2(-\cos x)$.
5. Число 12 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба первого слагаемого и утроенного второго слагаемого была наименьшей.
6. Найдите все пары положительных чисел, являющиеся решениями системы
$$\begin{cases} x^{2x+y} - y^4 = 0, \\ x^{16} - y^{2x+y} = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решите уравнение $\sqrt{2+7x} = 6-x$.
2. Найдите область определения функции $y = \frac{1}{2^{\sqrt{5-4x-x^2}}}$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}$, $y = 3x$, $x = 2$.
4. Решите уравнение $\log_3(\cos x) = \log_3(-\sin x)$.
5. Число 15 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение квадрата первого из них на второе было наибольшим.
6. Найдите все пары положительных чисел, являющиеся решениями системы
$$\begin{cases} y^3 - x^{5x-y} = 0, \\ y^{5x-y} - x^{12} = 0. \end{cases}$$

Вариант 1

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 9$.
2. Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 0$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{2}{5}}(1-x) \geq -1$.
4. Для функции $f(x) = 2x - 6$ найдите первообразную, график которой пересекает ось Ox в точке с абсциссой 4.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 6^{2x} + y \cdot 6^x = 12, \\ y^2 + y \cdot 6^x = -8. \end{cases}$$
6. При каких положительных значениях a уравнение $(\log_3 a)x^2 - (2\log_3 a - 1)x + \log_3 a - 2 = 0$ имеет единственный корень?

Вариант 2

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = 24x - 2x^3 + 9x^2 + 3$.
2. Решите уравнение $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 0$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{5}{2}}(3-x) \leq -1$.
4. Для функции $f(x) = 2x - 4$ найдите первообразную, график которой пересекает ось Ox в точке с абсциссой 1.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 7^{2x} - y \cdot 7^x = 28, \\ y^2 - y \cdot 7^x = -12. \end{cases}$$
6. При каких положительных значениях a уравнение $x^2 \log_4 a + (2\log_4 a + 1)x + \log_4 a + 2 = 0$ имеет единственный корень?

Вариант 1

1. Решите уравнение $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$.
2. Решите неравенство $9^{x+2} + 4 \cdot 3^{2x+2} \geq \frac{13}{3}$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 21$ на отрезке $[-3; 0]$.
4. Для функции $f(x) = \frac{3}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; 4\right)$.
5. Решите уравнение $\sqrt{x^4 - 5x^2 - \frac{5}{2}x} = 5 - x^2$.
6. Решите неравенство $2x + 2 - x^2 \geq 3^{x^2 - 2x + 2}$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\cos 2x - 2 \sin^2 x = 0$.
2. Решите неравенство $8^{x-2} + 3 \cdot 2^{3x-2} \leq \frac{49}{2}$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 9$ на отрезке $[0; 4]$.
4. Для функции $f(x) = \frac{2}{\sin^2 2x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{3}; 3\right)$.
5. Решите уравнение $\sqrt{x^4 - 3x^2 - \frac{3}{2}x} = x^2 - 3$.
6. Решите неравенство $2^{x^2 - 4x + 5} \leq 4x - 2 - x^2$.

Вариант 1

1. Обязательно решите уравнение $\lg_4(x+13) - \lg_4(3x-5) = 1$.
2. Решите уравнение $6\cos^2 x + \sin x - 5 = 0$.
3. Решите неравенство $3^{\frac{x-2}{x+3}} \leq \frac{1}{27}$.
4. В каких точках графика функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x^3 - 3\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ касательная к этому графику образует с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$?
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 1$ и $y = \cos \frac{\pi x}{2}$.
6. При каких значениях параметра a уравнение $16^x + (a+3) \cdot 4^x + 3a = 0$ имеет хотя бы один корень?

Вариант 2

1. Обязательно решите уравнение $\log_3(x+7) - \log_3(4x-5) = 1$.
2. Решите уравнение $6\sin^2 x - \cos x - 5 = 0$.
3. Решите неравенство $2^{\frac{x+3}{x-2}} \geq \frac{1}{16}$.
4. В каких точках графика функции $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3}}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x^3 + 1$ касательная к этому графику образует с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$?
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-1)^2$ и $y = 1 + \sin \frac{\pi x}{2}$.
6. При каких значениях параметра a уравнение $9^x + (a+2) \cdot 3^x + 2a = 0$ имеет хотя бы один корень?

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{81^{\log_9 6} - 7^{\log_7 9}}$.
2. Найдите все точки графика функции $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, в которых касательная к этому графику проходит через начало координат.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + y\right) = 1, \\ x - y = \frac{5\pi}{2}. \end{cases}$$
4. Решите неравенство $(x - 2)\log_4(x + 3) \geq 0$.
5. По геометрическому смыслу интеграла вычислите $\int_{-5}^0 \sqrt{25 - x^2} dx$.
6. Решите уравнение $\sin \sqrt{3 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{36^{\log_6 5} - 5^{\log_5 9}}$.
2. Найдите все точки графика функции $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$, в которых касательная к этому графику проходит через начало координат.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - y\right) = 1, \\ x + y = -\frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$
4. Решите неравенство $(3 - x)\log_3(x + 5) \leq 0$.
5. По геометрическому смыслу интеграла вычислите $\int_{-6}^6 \sqrt{36 - x^2} dx$.
6. Решите уравнение $\cos \sqrt{2 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответы к вариантам

Работа 1

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\{-3\}$.
2. Ответ: $[-3; 1]$.
3. Ответ: $8 - 2 \ln 3$.
4. Ответ: $\left\{ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Ответ: $12 = 11 + 1$.
6. Ответ: $\{(1; 1); (2; 4)\}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{2\}$.
2. Ответ: $[-5; 1]$.
3. Ответ: $\frac{9}{2} - 3 \ln 2$.
4. Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Ответ: $15 = 10 + 5$.
6. Ответ: $\left\{ (1; 1); (2; 4); (3; 9); \left(\frac{\sqrt{21}-1}{10}; \frac{\sqrt{21}+11}{10} \right) \right\}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: функция возрастает при $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ и убывает при $x \in [-3; 1]$.
2. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; 1\right)$.
4. Ответ: $F(x) = x^2 - 6x + 8$.
5. Ответ: $\{(1; -4)\}$.
6. Ответ: $\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{3}}; 1\right\}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: функция возрастает при $x \in [-1; 4]$ и убывает при $x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left[\frac{13}{5}; 3\right]$.
4. Ответ: $F(x) = x^2 - 4x + 3$.
5. Ответ: $\{(1; 3)\}$.
6. Ответ: $\{1; \sqrt{2}\}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; +\infty \right)$.
3. Ответ: наибольшее значение функции: 21; наименьшее — 5.
4. Ответ: $F(x) = 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2$.
5. Ответ: $\{-2\}$.
6. Ответ: $\{1\}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{3} \right]$.
3. Ответ: $\max_{[0; 4]} f(x) = f(4) = 71$; $\min_{[0; 4]} f(x) = f(1) = -10$.
4. Ответ: $F(x) = 4 - \operatorname{ctg} 2x$.
5. Ответ: $\{2\}$.
6. Ответ: $\{2\}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\{3\}$.
2. Ответ: $\left\{(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(-3; -\frac{7}{4}\right]$.
4. Ответ: $\left\{\left(-1; \frac{13\sqrt{3}}{3}\right); \left(2; -\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$.
5. Ответ: $\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi}$.
6. Ответ: $(-\infty; 0)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{2\}$.
2. Ответ: $\left\{\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(-\infty; 1] \cup (2; +\infty)$.
4. Ответ: $\{(1; 1 + \sqrt{3}); (-1; 1 - \sqrt{3})\}$.
5. Ответ: $\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi}$.
6. Ответ: $(-\infty; 0)$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 3.
2. Ответ: $\{(2; e)\}$.
3. Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{13\pi}{6} + 2\pi k\right); \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{17\pi}{6} + 2\pi k\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $(-3; -2] \cup [2; +\infty)$.
5. Ответ: $\frac{25\pi}{4}$.
6. Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{27-\pi^2}}{3}; \frac{\sqrt{27-\pi^2}}{3}\right\}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 2.
2. Ответ: $\{(3; e)\}$.
3. Ответ: $\left\{\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right); \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $(-5; -4] \cup [3; +\infty)$.
5. Ответ: 18π .
6. Ответ: $[1; +\infty)$.