

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 1998 год
базовые классы

Работа 1

Вариант 1

1. Упростите выражение $\frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}$.
2. Решите уравнение $\log_{x^2+x-4} 4 = 2$.
3. Решите неравенство $\frac{(x-3)\left(3^{\frac{1}{x-4}} + \frac{3}{10}\right)}{x+2} \geq 0$.
4. Дана функция $f(x) = \begin{cases} 4^x, & \text{если } x \leq 1, \\ 4x^3, & \text{если } x > 2. \end{cases}$ Вычислите $\int_0^3 f(x) dx$.
5. Решите неравенство $5 \cdot 3^{2x^2-3x-1} - 2 \cdot 3^{2x^2-3x} + 3^{2x^2-3x-3} \geq -72$.
6. Найдите промежутки возрастания и убывания, а также экстремумы функции $f(x) = x - 2 \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $\frac{\cos^2 2\beta - 4 \sin^2 \frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right)}$.
2. Решите уравнение $\log_{x^2-2x-5} 9 = 2$.
3. Решите неравенство $\frac{(x+5)\left(2^{\frac{3}{x+1}} + \frac{1}{5}\right)}{x-2} \leq 0$.
4. Дана функция $g(x) = \begin{cases} 5^x, & \text{если } x \leq 1, \\ 5x^4, & \text{если } x > 1. \end{cases}$ Вычислите $\int_0^2 g(x) dx$.
5. Решите неравенство $6 \cdot 2^{3x^2-2x} - 3 \cdot 2^{3x^2-2x+2} + 2^{3x^2-2x-2} \geq 0$.
6. Найдите промежутки возрастания и убывания, а также экстремумы функции $f(x) = 2 \sin x - x$ на отрезке $[\pi; 3\pi]$.

Вариант 1

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$ и $y = 1$.
2. Решите неравенство $4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 8 < 0$.
3. Решите уравнение $3 \log_3^2 x = \frac{5}{\log_x 3} + 2$.
4. Решите уравнение $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{4x^2 - 7x + 3} = 0$.
5. Найдите все такие значения параметра a , что касательная к графику функции $f(x) = x^7$ в точке $(a; f(a))$ и касательная к графику функции $g(x) = x^8$ в точке $(a; g(a))$ не пересекаются.
6. Решите уравнение $\log_2(x^2 - 4x + 8) = \sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{\pi x}{2}$.

Вариант 2

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{3}$ и $y = 1$.
2. Решите неравенство $9^{\sqrt{x}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 9 < 0$.
3. Решите уравнение $2 \log_2^2 x = \frac{5}{\log_x 2} + 3$.
4. Решите уравнение $\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$.
5. Найдите все такие значения параметра a , что касательная к графику функции $f(x) = x^5$ в точке $(a; f(a))$ и касательная к графику функции $g(x) = x^6$ в точке $(a; g(a))$ не пересекаются.
6. Решите уравнение $\log_2(x^2 - 4x + 8) = \sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{\pi x}{2}$.

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3x+5) \geq \log_{\sqrt{3}} 3$.
2. Решите уравнение $\sin^2 x - \frac{12-\sqrt{2}}{2} \sin x - 3\sqrt{2} = 0$.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln(3x+2)$, параллельной прямой $y = x + 4$.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 9^x - 2^y = 1, \\ 9^{-x} - 2^{-y} = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$
5. Для функции $f(x) = 5(x+3)$ найдите все ее первообразные, графики которых имеют с осью абсцисс единственную общую точку?
6. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x + (a+2)\sin x + 3a+1 = 0$ не имеет корней?

Вариант 2

1. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x-7) \geq \log_{\sqrt{2}} 2$.
2. Решите уравнение $\cos^2 x - \frac{8-\sqrt{3}}{2} \cos x - 2\sqrt{3} = 0$.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{2x}$, параллельной прямой $y = 8x - 1$.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 25^x - 3^y = 4, \\ 25^{-x} - 3^{-y} = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$
5. Для функции $f(x) = 3(x-2)$ найдите все ее первообразные, графики которых имеют с осью абсцисс единственную общую точку?
6. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x - (a-2)\cos x + 4a+1 = 0$ не имеет корней?

Вариант 1

1. Решите уравнение $\sqrt{3x+7} = x-7$.
2. Решите уравнение $14\sin^2 x + \cos 4x - 10 = 0$.
3. Вычислите $\int_1^2 (2x-3)^7 dx$.
4. Решите неравенство $\log_{\frac{\pi}{3}}(2x^2 - 2x - 9) \geq \log_{\frac{\pi}{3}}(x+1)$.
5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.
6. При каком значении параметра a графики функций $y = \ln(3x-4)$ и $y = 3x-4+a$ имеют единственную общую точку?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\sqrt{2x+4} = x-10$.
2. Решите уравнение $26\sin x \cos x - \cos 4x + 7 = 0$.
3. Вычислите $\int_1^{\frac{3}{2}} (4x-5)^5 dx$.
4. Решите неравенство $\log_{\frac{\pi}{4}}(x^2 + 2x - 10) \leq \log_{\frac{\pi}{4}}(x+2)$.
5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{ctg} x + x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.
6. При каком значении параметра a графики функций $y = \ln(2x+3)$ и $y = 2x+3+a$ имеют единственную общую точку?

Вариант 1

1. Решите уравнение $2 \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 1$.
2. Решите неравенство $4^{3x-5} - 9 \cdot 2^{3x-5} + 8 \leq 0$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$$
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - x^2$ и $y = 1 + |x|$.
5. Найдите все критические (стационарные) точки функции $y = \cos^2 x + \sin x + 1$, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.
6. Решите уравнение $2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14 - 3x}$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 2$.
2. Решите неравенство $9^{4x-3} - 10 \cdot 3^{4x-3} + 9 \leq 0$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \log_3(x^2 + 4x - 3) - \log_3 y = 1, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2 - |x|$.
5. Найдите все критические (стационарные) точки функции $y = \sin^2 x - \cos x - 1$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
6. Решите уравнение $\sqrt[4]{10 + 3x} = 74 - x^5 - 3x^3 - 8x$.