

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 1999 год
базовые классы

Работа 1

Вариант 1

1. Решите уравнение $5^{3x-2} - 6 \cdot 5^{3x} + 4 \cdot 5^{3x-1} = -645$.
2. Решите неравенство $\log_2(3x-2) \leq 4$.
3. Решите уравнение $\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x+1}$ и $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.
5. Тело движется по закону $S(t) = -t^3 + 6t^2 + 5t - 7$. В какой момент времени его ускорение будет равно 6 м/с^2 ? (Расстояние измеряется в метрах, время — в секундах.)
6. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{x^2 - 10x + 26} \geq \frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 2a - 8}$ выполняется для всех значений x ?

Вариант 2

1. Решите уравнение $4^{5x+1} + 5 \cdot 4^{5x} - 3 \cdot 4^{5x+2} = -624$.
2. Решите неравенство $\log_3(2x-3) \leq 2$.
3. Решите уравнение $2 \cos x \sin x + \cos 2x = 0$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x-1}$ и $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
5. Тело движется по закону $S(t) = t^3 - 3t^2 + t + 9$. В какой момент времени его ускорение будет равно 6 м/с^2 ? (Расстояние измеряется в метрах, время — в секундах.)
6. При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt{x^2 + 8x + 20} \leq \frac{2a^2 - 4a - 3}{a^2 - 2a - 8}$ не имеет решений?

Вариант 1

1. Решите уравнение $2^x - 6 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 16 = 0$.
2. Найдите критические (стационарные) точки и промежутки возрастания и убывания функции $y = 9 - x + 7 \ln x$.
3. Решите уравнение $\sin 2x + 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$.
4. Найдите первообразную функции $y = 3x^2 + 3(3x+1)^{-\frac{1}{2}}$, график которой проходит через точку $M(5; 130)$.
5. Решите неравенство $\log_{\frac{a^2+3}{a^2+4}}(3x-5) \geq \log_{\frac{a^2+3}{a^2+4}}(x+8)$.
6. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^3 + 12x^2 - 11x - 2} = 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $3^{4x} - 7 \cdot 3^{2x} - 18 = 0$.
2. Найдите критические (стационарные) точки и промежутки возрастания и убывания функции $y = 7 + x - 5 \ln x$.
3. Решите уравнение $\sin 2x - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = -1$.
4. Найдите первообразную функции $y = 3x^2 - 6(4x+1)^{-\frac{1}{2}}$, график которой проходит через точку $M(6; 180)$.
5. Решите неравенство $\log_{\frac{a^2+3}{a^2+2}}(2x+3) \leq \log_{\frac{a^2+3}{a^2+2}}(x+2)$.
6. Решите уравнение $\sqrt{x^3 + 8x^2 - 7x - 26} + \sqrt{x^2 + 3x - 10} = 0$.

Вариант 1

1. Решите уравнение $2 \cos^2 \frac{x}{2} - 15 \cos \frac{x}{2} - 8 = 0$.
2. Решите уравнение $\log_3(x^3 + x^2 - 4x + 2) = \log_3(x^3 - 1)$.
3. Решите неравенство $9^{\frac{x}{2}} - 12 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 27 \leq 0$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4x + 3$ и $y = x^2 - 2x + 3$.
5. Известно, что прямая, заданная уравнением $y = -9x + 2$, является касательной к графику функции $y = x^3 - 7x^2 + 2x - 3$. Найдите координаты точки касания.
6. Для каждого значения параметра a ($a > 0$, $a \neq 1$) найдите промежутки монотонности, точки экстремумов и экстремумы функции $y = x \cdot \log_a x$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $2 \sin^2 \frac{x}{2} + 19 \sin \frac{x}{2} - 10 = 0$.
2. Решите уравнение $\log_4(x^3 + x^2 - 3x - 3) = \log_4(x^3 + 1)$.
3. Решите неравенство $4^{\frac{x}{3}} - 6 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 8 \leq 0$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 2x + 5$ и $y = x^2 + 4x + 5$.
5. Известно, что прямая, заданная уравнением $y = -10x + 1$, является касательной к графику функции $y = x^3 - 5x^2 - 3x - 2$. Найдите координаты точки касания.
6. Для каждого значения параметра a ($a > 0$, $a \neq 1$) найдите промежутки монотонности, точки экстремумов и экстремумы функции $y = x \cdot a^x$.

Вариант 1

1. Решите уравнение $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$.
2. Найдите значение выражения $\sqrt{\log_2^2 \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 7$, $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 1$.
4. Решите неравенство $\log_2(x^2 + 3x) \leq 2$.
5. Решите уравнение $\sin^4 x - 1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x - \cos^4 x$.
6. Представьте число 8 в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы сумма кубов двух первых слагаемых и третьего, умноженного на 9, была наименьшей, если известно, что первое слагаемое в два раза больше второго.

Вариант 2

1. Решите уравнение $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$.
2. Найдите значение выражения $\sqrt{\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^2 \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 6$, $y = x^2 + 2$, $x = -1$, $x = 1$.
4. Решите неравенство $\log_3(x^2 + 8x) \leq 2$.
5. Решите уравнение $\cos^4 x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = 1 - \sin^4 x$.
6. Представьте число 11 в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы сумма кубов двух первых слагаемых и третьего, умноженного на 21, была наименьшей, если известно, что первое слагаемое в три раза больше второго.

Вариант 1

1. Решите неравенство $\frac{3^{\frac{2}{x-2}}}{5-x} > 0$.
2. Вычислите интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx$.
3. Решите систему $\begin{cases} 4 \cdot 5^x - 3 \cdot 2^y = -4, \\ 2 \cdot 5^x + 3 \cdot 2^y = 34. \end{cases}$
4. Из всех прямоугольников, имеющих периметр 48 см, найдите стороны того, который имеет наибольшую площадь.
5. При каких значениях x графики функций $y = \log_3(x^3 - 5x^2 + 4x)$ и $y = \log_3(1-x) + \log_3(4x - x^2)$ совпадают?
6. При каких значениях параметра $a \neq -3$, уравнение $2 \sin 2x = \frac{a-1}{a+3}$ не имеет корней?

Вариант 2

1. Решите неравенство $\frac{2^{\frac{3}{x+2}}}{x+7} > 0$.
2. Вычислите интеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.
3. Решите систему $\begin{cases} 3 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^y = -6, \\ 4^x + 2 \cdot 3^y = 22. \end{cases}$
4. Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма катетов равна 16 см, найдите катеты того, которых имеет наибольшую площадь.
5. При каких значениях x графики функций $y = \log_7(x^3 + x^2 - 6x)$ и $y = \log_7(x+3) + \log_7(x^2 - 2x)$ совпадают?
6. При каких значениях параметра $a \neq 2$, уравнение $3 \cos 3x = \frac{a+5}{a-2}$ не имеет корней?