

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 2000 год
базовые классы

Работа 1

Вариант 1

1. Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^x + 2^{3-x} = 9$.
2. Решите уравнение $\sin^2 x - \cos^2 x = (\cos x - \sin x)^2$.
3. Определите, при каком значении x производная функции $f(x) = \sqrt{3x-5}$ равна 0,15.
4. Решите неравенство $\log_3(x+7) < \log_3(5-x) + \log_3(3-x)$.
5. Докажите, что функция $F(x) = \ln x + 2\sqrt{3x-1} - 1999$ является первообразной функции $f(x) = \frac{3x-1+3x\sqrt{3x-1}}{x(3x-1)}$ на промежутке $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
6. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 3x^2 - 24x + a = 0$ имеет ровно два различных корня?

Вариант 2

1. Решите уравнение $3^{1-x} + \left(\frac{1}{9}\right)^x = 18$.
2. Решите уравнение $\cos^2 x - \sin^2 x = (\sin x + \cos x)^2$.
3. Определите, при каком значении x производная функции $f(x) = \sqrt{5x+4}$ равна 0,3125.
4. Решите неравенство $\log_2 24 > \log_2(16-x) + \log_2(2x-6)$.
5. Докажите, что функция $F(x) = 2000 - \ln x - 4\sqrt{2x+1}$ является первообразной функции $f(x) = -\frac{2x+1+4x\sqrt{2x+1}}{x(2x+1)}$ на промежутке $(0; +\infty)$.
6. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + 6x^2 - 15x + a = 0$ имеет ровно два различных корня?

Вариант 1

1. Решите уравнение $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 3x - 5} = x^2 - 1$.
2. Найдите множество первообразных функции $f(x) = \frac{8x^3 - 6x^2 + 4x - 5}{2x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 300x + 2000$ на промежутке $[0; 3]$.
4. Решите уравнение $1 + \sin^2 5x = \frac{3}{2} \sin 10x$.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 5^y \cdot 2^x = 200, \\ \log_6(x - y) = 0. \end{cases}$$
6. Решите неравенство $(10x - x^2 - 24) \log_2 \left(\sin^2 \frac{\pi x}{2} + 1 \right) \geq 1$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 5x + 11} = x^2 + 1$.
2. Найдите множество первообразных функции $f(x) = \frac{6x^3 + 3x^2 - 6x + 7}{4x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 180x - 1999$ на промежутке $[-3; 0]$.
4. Решите уравнение $3 + \cos^2 3x = \frac{7}{2} \sin 6x$.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108, \\ \log_3(y - x) = 0. \end{cases}$$
6. Решите неравенство $(-x^2 - 8x - 15) \log_3(2 \cos^2 \pi x + 1) \geq 1$.

Вариант 1

1. Решите неравенство $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x+1}} + 5^{\sqrt{x}}$.
2. Найдите значение выражения $\frac{\cos 35^\circ + \sqrt{3} \sin 35^\circ}{\sin 1505^\circ}$.
3. Решите уравнение $\sqrt{x-1999} = x-1999$.
4. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{4x^2 - 3}{x}$, график которой проходит через точку $A(-1; 5)$.
5. Решите уравнение $\log_2^2 x - 3|\log_2 x| + 2 = 0$.
6. Решите уравнение $\sin \pi x + \cos \pi x = 2^{\log_2 \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{49}{16}}}$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x-1}} - 3^{\sqrt{x-2}} < 11$.
2. Найдите значение выражения $\frac{2\sqrt{2}(\cos 35^\circ - \sin 35^\circ)}{\cos 1160^\circ}$.
3. Решите уравнение $\sqrt{2000-x} = 2000-x$.
4. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x}$, график которой проходит через точку $A(-1; -2)$.
5. Решите уравнение $\log_3^2 x - 4|\log_3 x| + 3 = 0$.
6. Решите уравнение $\sin \frac{3\pi x}{2} - \cos \frac{3\pi x}{2} = 2^{\log_5 \sqrt{x^2 - x + \frac{21}{4}}}$.

Вариант 1

1. Найдите первообразную функции $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x - 5$, график которой проходит через точку $A(2; -8)$.
2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > -1$.
3. Решите уравнение $9^{-x+\frac{1}{2}} - 26 \cdot 3^{-x} - 9 = 0$.
4. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 13$.
5. Решите неравенство $\sin^2 x - 4 \cos x + 4 < 0$.
6. При каких значениях параметра m уравнение $1999^{2x} - 4 \cdot 1999^x - 3m + m^2 = 0$ имеет единственный корень?

Вариант 2

1. Найдите первообразную функции $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 8x + 7$, график которой проходит через точку $A(-2; -22)$.
2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{8+x}{3-x} > -1$.
3. Решите уравнение $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0$.
4. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции $f(x) = -12x^5 - 15x^4 + 40x^3 + 7$.
5. Решите неравенство $3 \sin x - 3 - \cos^2 x < 10$.
6. При каких значениях параметра m уравнение $2000^{2x} - 6 \cdot 2000^x + m^2 - 8m = 0$ имеет единственный корень?

Вариант 1

1. Найдите ту первообразную функции $f(x) = 2x - 6$, график которой проходит через точку $A(2; -3)$, и постройте график этой первообразной.
2. Решите уравнение $\log_4(x^4 - x^2 + 3x - 7) = \log_4(x^4 + x^2 - 5x + 1)$.
3. Представьте число 61 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба первого слагаемого и второго, умноженного на 12, была наименьшей.
4. Решите уравнение $2 \cos^2\left(\frac{1999\pi}{2} + x\right) - 3 \sin(2000\pi + x) + 1 = 0$.
5. Решите неравенство $\frac{\lg x}{x^2 - x - 6} \geq 0$.
6. Найдите все такие пары чисел $(x; y)$, что $\sqrt{x^2 + 8x + 20} = 2 \sin y$.

Вариант 2

1. Найдите ту первообразную функции $f(x) = 2x + 6$, график которой проходит через точку $A(-1; 3)$, и постройте график этой первообразной.
2. Решите уравнение $\log_4(x^4 + x^2 - 7x + 4) = \log_4(x^4 - x^2 - 9x + 8)$.
3. Представьте число 47 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба первого слагаемого и второго, умноженного на 27, была наименьшей.
4. Решите уравнение $2 \cos^2(2000\pi - x) + 3 \sin\left(\frac{1999\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.
5. Решите неравенство $\frac{\ln x}{x^2 + 2x - 8} \leq 0$.
6. Найдите все такие пары чисел $(x; y)$, что $\sqrt{x^2 - 10x + 26} = \cos 2y$.