

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 2001 год
базовые классы

Работа 1

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_2(x^2 + 3x) \leq 1$.
2. Исследуйте функцию $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 5$ на возрастание, убывание и экстремумы. Найдите наибольшее значение функции на промежутке $[-3; 0]$.
3. Решите уравнение $2\sin^2 6x + \cos^2 3x = 0$.
4. Решите уравнение $5 \cdot 4^x + 23 \cdot 10^x - 10 \cdot 25^x = 0$.
5. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 3x + 11} - 5 = x^2 - 3x$.
6. Найдите площадь фигуры, ограниченной снизу графиком уравнения $x^2 + y^2 = 4$, а сверху – графиком функции $y = -|x| + 2$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\log_8(x^2 - 2x) \leq 1$.
2. Исследуйте функцию $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 - 4$ на возрастание, убывание и экстремумы. Найдите наибольшее значение функции на промежутке $[0; 3]$.
3. Решите уравнение $\cos^2 2x + 2\sin^4 4x = 0$.
4. Решите уравнение $4 \cdot 9^x + 13 \cdot 12^x - 12 \cdot 16^x = 0$.
5. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 5x - 2} + 4 = x^2 + 5x$.
6. Найдите площадь фигуры, ограниченной снизу графиком уравнения $x^2 + y^2 = 9$, а сверху – графиком функции $y = |x| - 3$.

Вариант 1

1. Найдите производную функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3\sqrt{x} + 5$ в точке $x_0 = 9$.
2. Решите уравнение $2\cos^2 x - 9\sqrt{3}\cos x + 12 = 0$.
3. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x^2 - 4x + 5 - \frac{1}{x}$, график которой проходит через точку пересечения прямых $y = 2x + 1$ и $y = -x + 4$.
4. Решите уравнение $2^{\log_3 x^2} + 2^{\log_3 x} - 6 = 0$.
5. Решите неравенство $\frac{(2^x - 32)(3^x + 27)}{x^2 + 5x - 14} \leq 0$.
6. Решите уравнение $2^{\sqrt{x}} = \sin\left(\frac{11x}{3} + \frac{33\pi}{2}\right)$.

Вариант 2

1. Найдите производную функции $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3\sqrt{x} + 5$ в точке $x_0 = 4$.
2. Решите уравнение $2\sin^2 x = 11\sqrt{2}\sin x - 12$.
3. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 4 + \frac{1}{x}$, график которой проходит через точку пересечения прямых $y = x - 3$ и $y = -3x + 1$.
4. Решите уравнение $3^{\log_2 x^2} - 3^{\log_2 x} - 6 = 0$.
5. Решите неравенство $\frac{(3^x - 27)(2^x + 32)}{x^2 - 3x - 18} \leq 0$.
6. Решите уравнение $\cos\left(22\pi - \frac{13x}{4}\right) = 3^{\sqrt{x}}$.

Вариант 1

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 13$ на промежутке $[-3; 0]$.
2. Решите уравнение $6^{2x} \cdot 5^{4x} = 22500$.
3. Решите неравенство $\log_3(30x - x^2) \leq 4$.
4. Дана функция $f(x) = 2\sin x - 3\cos x + 4$. Найдите $f(2\pi)$.
5. Решите уравнение $\sqrt{3x-2} = 12 - 4\sqrt{3x-2}$.
6. При каких значениях параметра a максимум функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x + a^3 - 3a^2 + 2a - 175$ равен нулю?

Вариант 2

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 11$ на промежутке $[0; 4]$.
2. Решите уравнение $2^{6x} \cdot 10^{3x} = 64000$.
3. Решите неравенство $\log_2(20x - x^2) \leq 6$.
4. Дана функция $f(x) = 3\sin x - 2\cos x + 2$. Найдите $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$.
5. Решите уравнение $\sqrt{5x-19} = 8 - 7\sqrt{5x-19}$.
6. При каких значениях параметра a минимум функции $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x + a^3 + 4a^2 - 5a + 40$ равен нулю?

Вариант 1

1. Найдите множество первообразных функции $f(x) = 3x^2 - 2x + 3 - \sqrt{x}$.
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3^{\log_3(x+y)} = 4, \\ 2^x + 2^y = 10. \end{cases}$$
3. Найдите координаты тех точек графика функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 12x + 4$, касательные в которых параллельны прямой $y = 3x + 4$.
4. Решите уравнение $4\cos^4 x - 19\cos^2 x + 12 = 0$.
5. Решите неравенство $\sqrt{8 - 2^x} \cdot \log_2 \frac{4 - x}{x + 2} \geq 0$.
6. Решите уравнение $2^{\cos(\pi x + \pi)} = x^2 - 6x + 11$.

Вариант 2

1. Найдите множество первообразных функции $f(x) = 3x^2 + 4x - 5 + \sqrt{x}$.
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{\log_2(x+y)} = 3, \\ 3^x + 3^y = 12. \end{cases}$$
3. Найдите координаты тех точек графика функции $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 19x - 2$, касательные в которых параллельны прямой $y = 2x - 5$.
4. Решите уравнение $2\sin^4 x + 15\sin^2 x - 8 = 0$.
5. Решите неравенство $\sqrt{3^x - 81} \cdot \log_3 \frac{x - 2}{16 - 2x} \geq 0$.
6. Решите уравнение $3^{\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)} = x^2 + 4x + 7$.

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_3(x^2 + 3x + 12) \leq 3$.
2. Вычислите $\frac{\cos^2 39,5^\circ - \cos^2 50,5^\circ}{\sin 551^\circ}$.
3. Решите уравнение $3^{3x+1} + 8 \cdot 3^{2x} - 3^{x+1} = 0$.
4. Из всех прямоугольников, имеющих площадь $20,25 \text{ см}^2$, найдите стороны того, который имеет наименьший периметр.
5. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}}(2 \sin^2 x - 1) = \log_{\sqrt{3}} \sin x$.
6. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x + 2(a - 2)\cos x + a^2 - 4a - 5 = 0$ имеет хотя бы одно решение?

Вариант 2

1. Решите неравенство $\log_2(x^2 - x + 4) \leq 4$.
2. Вычислите $\frac{\sin^2 27,5^\circ - \sin^2 62,5^\circ}{\sin 395^\circ}$.
3. Решите уравнение $2^{3x+1} + 7 \cdot 2^{2x} - 2^{x+2} = 0$.
4. Из всех прямоугольников, имеющих площадь $15,125 \text{ см}^2$, найдите катеты того треугольника, у которого сумма катетов наименьшая.
5. Решите уравнение $\log_{\sqrt{5}} \cos x = \log_{\sqrt{5}}(1 - 2 \cos^2 x)$.
6. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x - 2(a - 3)\sin x + a^2 - 6a + 5 = 0$ не имеет решений?

Вариант 1

1. Найдите первообразную функции $f(x) = 2x^2 - 3\sqrt{x} + 4$, график которой проходит через точку $M(4; 3)$.
2. Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{3}\right)^x - 6 \leq 0$.
3. Решите уравнение $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{4} + \sin x = 0$.
4. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{\sqrt{9,6 + 0,2x - x^2}}{\sin x}$.
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 4, \\ \log_3^2 x + \log_3^2 y = 10. \end{cases}$
6. Решите неравенство $\sin^2\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{4x^2 - 17\pi x + 4\pi^2} \leq 0$.

Вариант 2

1. Найдите первообразную функции $f(x) = 2\sqrt{x} - 3x^2 - 5$, график которой проходит через точку $M(9; -2)$.
2. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 3\left(\frac{1}{5}\right)^x - 10 \geq 0$.
3. Решите уравнение $\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{4} + \cos x = 0$.
4. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{\sqrt{6,4 - 2,4x - x^2}}{\cos x}$.
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 5, \\ \log_3^2 x + \log_3^2 y = 13. \end{cases}$
6. Решите неравенство $\sin^2\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3x^2 + 8\pi x - 3\pi^2} \leq 0$.

Вариант 1

1. Решите неравенство $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 \leq 0$.
2. Найдите множество первообразных функции $f(x) = 3x - 4 + \frac{1}{3x-4} + \frac{1}{(3x-4)^2}$.
3. Дана функция $f(x) = \sqrt{3x-2}$. Решите уравнение $f(x) = f'(x)$.
4. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3) + \log_{\frac{1}{27}}(2x-3) + \log_{12} 144 = \frac{1}{6} - \log_{\frac{1}{9}}(2x-3)$.
5. Решите уравнение $4 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 4x\right) + 4 \sin^2(6\pi + 2x) = 1$.
6. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $2x^3 - 2x^2 - 36x + a - 3 = 0$ имеет ровно два корня.

Вариант 2

1. Решите неравенство $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 \leq 0$.
2. Найдите множество первообразных функции $f(x) = 2x + 5 - \frac{1}{2x+5} + \frac{1}{(2x+5)^2}$.
3. Дана функция $f(x) = \sqrt{5x+1}$. Решите уравнение $f(x) = f'(x)$.
4. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{16}}(3x-4) + \log_{\frac{1}{4}}(3x-4) + \log_{13} 169 = \frac{1}{4} - \log_{\frac{1}{2}}(3x-4)$.
5. Решите уравнение $4 \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) + 4 \cos\left(3\pi + \frac{x}{2}\right) = -3$.
6. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $2x^3 + 3x^2 - 36x - a + 2 = 0$ имеет ровно два корня.

Вариант 1

1. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{5x-1}$ и $y = x+1$.
2. Определите, при каких значениях x производная функции $f(x) = 3x - \frac{5}{x}$ равна 48.
3. Решите уравнение $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.
4. Решите неравенство $(3 + 2\sqrt{2})^x + 3 < 4(3 - 2\sqrt{2})^x$.
5. Решите уравнение $\log_2 x + 20\log_2 x^2 = 8$.
6. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + (2 - 5\pi)x + 6\pi^2 - 4\pi} + \sqrt{\sin(x - 13\pi)} = 0$.

Вариант 2

1. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{4x-7}$ и $y = x-1$.
2. Определите, при каких значениях x производная функции $f(x) = 5x + \frac{3}{x}$ равна $\frac{17}{4}$.
3. Решите уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.
4. Решите неравенство $(5 + 2\sqrt{6})^x + 2 > 3(5 - 2\sqrt{6})^x$.
5. Решите уравнение $24\log_3 x^3 + \log_3 x - 9 = 0$.
6. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - (3 + \pi)x - 6\pi^2 + 9\pi} + \sqrt{\cos\left(x + \frac{13\pi}{2}\right)} = 0$.

Вариант 1

1. Упростите выражение $\frac{8-27^n}{4+2 \cdot 3^n+9^n}+2+3^n$.
2. Решите уравнение $\sqrt{5x+6}=3x-12$.
3. Вычислите $\cos 2\alpha$, если $4 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 15$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
4. В правильной четырехугольной призме сумма длин всех 12 ребер равна 160 см. Найдите объем призмы при условии, что площадь ее боковой поверхности является наибольшей.
5. Решите неравенство $\log_6(x^2-7x) \geq \log_6(2-x)+1$.
6. Решите уравнение $2 \sin 2x + 7 \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 9$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $\frac{8^m+27}{4^m-3 \cdot 2^m+9}+3-2^m$.
2. Решите уравнение $\sqrt{4x-3}=2x-9$.
3. Вычислите $\sin 2\alpha$, если $3 \operatorname{tg} \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha = 8$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.
4. В правильной четырехугольной призме сумма длин всех 9 ребер равна 120 см. Найдите объем призмы при условии, что площадь ее боковой поверхности является наибольшей.
5. Решите неравенство $\lg(x^2-7x) \geq 1 + \lg(1-x)$.
6. Решите уравнение $3 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 5 \cos 2x = 8$.