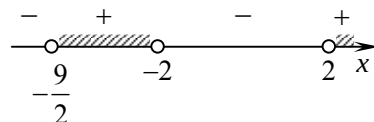


Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 2005 год
базовая программа

Решения задач первого варианта

1. Решите неравенство $\frac{24-6x^2}{2x+9} < 0$.

$$\frac{24-6x^2}{2x+9} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{2x+9} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{2x+9} > 0.$$



Ответ: $\left(-\frac{9}{2}; -2\right) \cup (2; +\infty)$.

2. Решите уравнение $2^{x+4} - 2^x = 120$.

$$2^{x+4} - 2^x = 120 \Leftrightarrow 2^x(16-1) = 120 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $\{3\}$.

3. Решите уравнение $\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) = 0$.

$$\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Укажите:

а) область определения функции: $[-3; 5,5]$;

б) при каких значениях x $f(x) \geq \frac{3}{2}$: $[-2; 0] \cup [4,5; 5,5]$;

в) при каких значениях x $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$: $f'(x) > 0$ при $(-3; -1) \cup (2,5; 5,5)$, $f'(x) < 0$ при $(-1; 2,5)$;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс: $(-1; 2)$ и $(2,5; -3)$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции: $\max_{[-3; 5,5]} f(x) = 5,5$, $\min_{[-3; 5,5]} f(x) = -3$.

5. Для какой из функций $f(x) = 3(x^2 - 2)$, $g(x) = 3x(x^2 - 2)$, $q(x) = 3x^2 - 6x + 1$ функция $F(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ является первообразной?

Поскольку $F'(x) = 3x^2 - 6x$, что не совпадает с выражениями, задающими функции f, g, q , ни для какой из них функция F первообразной не является.

Ответ: ни для какой.

6. Вычислите $\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 9^{\log_3 2}$.

По определению логарифмов имеем:

$$\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 9^{\log_3 2} = -4 \log_2 2 \cdot (-2 \log_5 5) : 4 = -4 \cdot (-2) : 4 = 2.$$

Ответ: 2.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16. \end{cases}$

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 8, \\ x - 3y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\{(10; 2)\}$.

8. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y = \frac{2x-2}{x+1}$, имеющих угловой коэффициент 4.

$$y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}.$$

$$y' = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{(x+1)^2} = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 0. \end{cases}$$

1. $x_0 = -2$, следовательно, $y_0 = 6$. Таким образом, уравнение касательной имеет вид

$$y = 4(x+2) + 6 \Leftrightarrow y = 4x + 14.$$

Тогда $\begin{cases} x = 0, \\ y = 14 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -\frac{7}{2}, \\ y = 0. \end{cases}$

2. $x_0 = 0$, следовательно, $y_0 = -2$. Таким образом, уравнение касательной имеет вид

$$y = 4x - 2.$$

Тогда $\begin{cases} x = 0, \\ y = -2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 0. \end{cases}$

Ответ: координаты точек пересечения с осью абсцисс: $\left(-\frac{7}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; координаты точек пересечения с осью ординат: $(0; 14)$, $(0; -2)$.

9. Решите уравнение $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$.

$$\begin{aligned} \cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x &\Leftrightarrow \sin 8x + \sin 2x = \cos 3x - \cos 7x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 5x \cdot \sin 2x &\Leftrightarrow \sin 5x(\sin 2x - \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 0, \\ \sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 0, \\ \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \pi k, \\ \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi k, \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{5}, \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

10. Решите уравнение $x^2 - 6|x| - 2 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 - 6|x| - 2 = 0 &\Leftrightarrow |x|^2 - 6|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 3 - \sqrt{11} - \text{решений нет,} \\ |x| = 3 + \sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x| = 3 + \sqrt{11} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - \sqrt{11}, \\ x = 3 + \sqrt{11}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{-3 - \sqrt{11}; 3 + \sqrt{11}\}$.