

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 1997 год
математические классы

Работа 1

Вариант 1

1. Пусть $|z| = 2$, $\arg z = \frac{\pi}{3}$ (z — комплексное число). Найдите модуль и один из аргументов числа $z^3 - 8i$.
2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 5$ и касательными к нему, проведенными через точку $M(0; 1)$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x + \sin y = 1. \end{cases}$$
4. Найдите наибольшие и наименьшие значения функции $g(x) = \cos 3x + 8 \cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.
5. Для каждого значения параметра b решите уравнение $\log_3(x - 5) = \log_9(x^2 + 3x - b)$.
6. Решите неравенство $3^{2x-1} - 3^{x-1}(3x^{\frac{2}{3}} + x) + x^{\frac{5}{3}} \leq 0$.

Вариант 2

1. Пусть $|z| = \frac{1}{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$ (z — комплексное число). Найдите модуль и один из аргументов числа $32z^4 + 2\sqrt{3}i$.
2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 1 - x^2$ и касательными к нему, проведенными через точку $M(0; 5)$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{2}, \\ \sin x - \sin y = -1. \end{cases}$$
4. Найдите наибольшие и наименьшие значения функции $f(x) = 2 \sin 3x + 16 \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.
5. Для каждого значения параметра b решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) = \log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 7x - b)$.
6. Решите неравенство $2^{2x-1} - 2^{x-1}(2x^{\frac{1}{2}} + x) + x^{\frac{3}{2}} \geq 0$.

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$. Найдите $f'''(0)$.
2. Найдите наибольший объем цилиндра, полная поверхность которого 2π .
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3^{-x}$, $y = \frac{x}{3}$ и осью ординат.
4. Многочлен $f(x)$ при делении на многочлен $x^3 + x^2 - 10x + 8$ дает в остатке $x^2 - x + 1$. Найдите значение выражения $f(1) \cdot f(2) - f(-4)$.
5. Изобразите на комплексной плоскости все такие числа z , для которых $\left| \frac{z + 2\bar{z}}{z - i} \right| = 1$.
6. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 4x = 8 \operatorname{tg} x$.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = e^{2x} \cos x$. Найдите $f'''(0)$.
2. Найдите наименьшую полную поверхность цилиндра, объем которого $\frac{\pi}{3}$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2^x$, $y = 3 - x$ и осью ординат.
4. Многочлен $f(x)$ при делении на многочлен $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ дает в остатке $x^2 - 8x + 14$. Найдите значение выражения $f(3) \cdot f(5) - f(-1)$.
5. Изобразите на комплексной плоскости все такие числа z , для которых $\left| \frac{2z + \bar{z}}{z + 2i} \right| = 1$.
6. Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{1}{8}$.

Вариант 1

1. Решите неравенство $\arccos \frac{2}{x} < \frac{\pi}{3}$.
2. Решите уравнение $3 \log_2^2(x+1) - \frac{1}{4} \log_2^2(3x+5)^2 + 2 \log_2(x+1) \cdot \log_2(3x+5) = 0$.
3. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$, график $y = F(x)$ которой проходит через точку $M(2; \ln 3)$.
4. Найдите уравнения всех общих касательных к графикам функций $y = -x^2 + 9x - 23$ и $y = x^2 + 3x - 6$.
5. Найдите все действительные значения b , такие, что система неравенств $\begin{cases} |z+i| \leq 3, \\ |z+3b| \leq 2b \end{cases}$ имеет ровно одно решение на множестве комплексных чисел.
6. Изобразите множество точек $M(a; b)$ координатной плоскости Oab , таких, что уравнение $\sqrt{3x+a} = \sqrt{x^2-bx+a}$ имеет два различных корня (по x).

Вариант 2

1. Решите неравенство $\arcsin \frac{3}{x} > \frac{\pi}{6}$.
2. Решите уравнение $\frac{1}{3} \log_5^2(x-2)^3 + 2 \log_5(x-2) \cdot \log_5(3x-4) = \log_5^2(3x-4)$.
3. Найдите первообразную $F(x)$ функции $f(x) = \frac{4}{4-x^2}$, график $y = F(x)$ которой проходит через точку $M(1; \ln 3)$.
4. Найдите уравнения всех общих касательных к графикам функций $y = 3x^2 - 5x - 2$ и $y = 2x^2 - x - 6$.
5. Найдите все действительные значения b , такие, что система неравенств $\begin{cases} |z-i| \leq 2, \\ |z-4b| \leq -3b \end{cases}$ имеет ровно одно решение на множестве комплексных чисел.
6. Изобразите множество точек $M(a; b)$ координатной плоскости Oab , таких, что уравнение $\sqrt{2x-b} = \sqrt{x^2+3ax-b}$ имеет два различных корня (по x).

Ответы к вариантам

Работа 1

Ответы к варианту 1

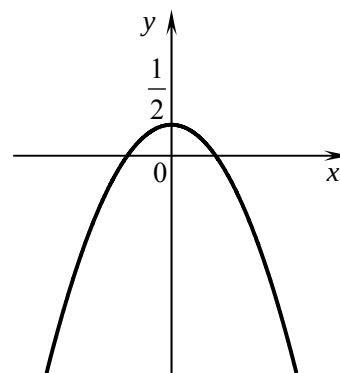
1. Ответ: $|z| = 8\sqrt{2}$, $\arg z = -\frac{3\pi}{4}$.
2. Ответ: $\frac{16}{3}$.
3. Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right); \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: наибольшее значение есть 9; наименьшее — $-\frac{7}{27}$.
5. Ответ: при $b > 40$: $\frac{b+25}{13}$; при $b \leq 40$: решений нет.
6. Ответ: $\left[\frac{1}{3}; 1 \right]$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $|z| = 4$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$.
2. Ответ: $\frac{16}{3}$.
3. Ответ: $\left\{ \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right); \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: наибольшее значение есть 18; наименьшее — $-\frac{14}{27}$.
5. Ответ: при $b < 30$: $\left\{ -\frac{b+9}{13} \right\}$; при $b \geq 30$: решений нет.
6. Ответ: $\left[0; \frac{1}{2} \right) \cup (1; +\infty)$.

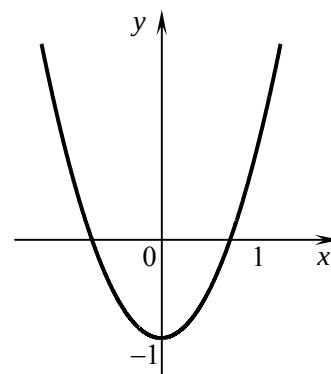
Ответы к варианту 1

1. Ответ: 4.
2. Ответ: $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.
3. Ответ: $\frac{4 - \ln 3}{6 \ln 3}$.
4. Ответ: -18 .
5. Ответ: см. рисунок.
6. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{9} : k \neq 9n + 4; k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.



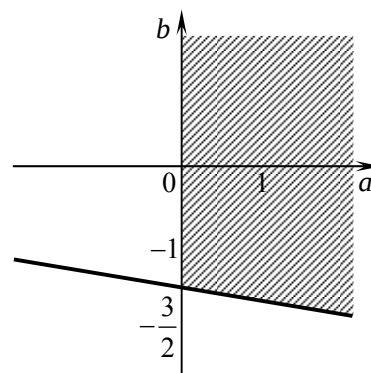
Ответы к варианту 2

1. Ответ: 2.
2. Ответ: $\pi\sqrt[3]{6}$.
3. Ответ: $\frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.
4. Ответ: 22.
5. Ответ: см. рисунок.
6. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9}; \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi m}{7} : k \neq 9n + 2, m \neq 7p + 5; k, n, m, p \in \mathbb{Z} \right\}$.



Ответы к варианту 1

1. Ответ: $[2; 4)$.
2. Ответ: $\left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$.
3. Ответ: $F(x) = \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2\ln 3$.
4. Ответ: $y = 11x - 22$, $y = x - 7$.
5. Ответ: $\left\{0; \frac{6+2\sqrt{19}}{5}\right\}$.
6. Ответ: см. рисунок.



Ответы к варианту 2

1. Ответ: $[3; 6)$.
2. Ответ: $\left\{\frac{7}{3}; 4\right\}$.
3. Ответ: $F(x) = \ln|x+2| + \ln|x-2|$.
4. Ответ: $y = 7x - 14$, $y = x - 7$.
5. Ответ: $\left\{\frac{-6-\sqrt{57}}{7}; 0\right\}$.
6. Ответ: см. рисунок.

