Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 2000 год
математические классы

Работа 1

Вариант 1

1. Решите неравенство $(x^2-8x+12)\sqrt{x^2-10x+21}\ge 0$.
2. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел *z*, для которых $\dfrac{|z+4|-|\overline{z}-i|}{\operatorname{Re} z}=0$.
3. Найдите наименьшую площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $g(x)=e^x+e^{2-x}$ и двумя параллельными оси *Oy* прямыми, расстояние между которыми равно 2.
4. Найдите острый угол, образованный касательными, проведенными из точки $M\left(\dfrac{12}{7};12\right)$ к графику функции $f(x)=x+\dfrac{16}{\sqrt{x}}$.
5. Решите уравнение $9\sin t=\sin 9t$.
6. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $x=a\log_a(x+2a-2|x-a|+3|x-2a|-2|x-2a|)-a$ имеет ровно один корень.

Вариант 2

1. Решите неравенство $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\le 0$.
2. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел *z*, для которых $\dfrac{|z-3|-|\overline{z}+2i|}{\operatorname{Im} z}=0$.
3. Найдите наименьшую площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $g(x)=e^{-x}+e^{3+x}$ и двумя параллельными оси *Oy* прямыми, расстояние между которыми равно 3.
4. Найдите острый угол, образованный касательными, проведенными из точки $M\left(\dfrac{3}{7};3\right)$ к графику функции $f(x)=4x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
5. Решите уравнение $15\sin u=\sin 15u$.
6. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $x=a\log_a(2x-3||x-3a|-2a|)-a$ имеет ровно один корень.

Работа 2

Вариант 1

1. Найдите промежутки возрастания, точки максимума и максимумы функции $y = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.
2. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $x + y = 3$ и графиками функций $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $g(x) = (\sqrt{-x})^4 - \frac{1}{9}$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_{x-2}(xy - x - 2y) + \frac{1}{2}\log_{y-1}(x^2 - 4x + 4) = 3, \\ \log_{x+1}(x + y - 2) - \log_{y+2}(x^2 + y^2) = -1. \end{cases}$
4. Решите неравенство $\dfrac{3 - 4\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)}{\arccos\frac{x}{2}} + \left|\cos\frac{9x}{4}\right| < 0$.
5. На прямой $y = 3x - 5$ найдите все такие точки, что проведенные через них касательные к графику функции $y = 2x^2$ взаимно перпендикулярны.
6. Найдите все такие действительные значения параметра a, при которых существует ровно одно комплексное число z, действительная и мнимая части которого выражены целыми числами, удовлетворяющими одновременно двум условиям $|z - 4 - 3i| < a$ и $|\bar{z} - 4 - 3i| < a$.

Вариант 2

1. Найдите промежутки возрастания, точки минимума и минимумы функции $y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.
2. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $2x - 3y + 7 = 0$ и графиками функций $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$, $g(x) = \sqrt{x^4} - \frac{9}{4}$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_{x+1}(xy + x + y + 1) + \log_{x+y}(y + 2) = 4, \\ 2\log_{x+1}(y + 1) - \log_{x+y}(y^2 + 2x + xy + 2y) = 2. \end{cases}$
4. Решите неравенство $\dfrac{2\cos\left(10x - \frac{2\pi}{3}\right) - 4\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi - 2\arcsin\frac{x}{2}} + \left|\sin\frac{15x}{4}\right| < 0$.
5. На прямой $y = 2x + 7$ найдите все такие точки, что проведенные через них касательные к графику функции $y = -x^2$ взаимно перпендикулярны.
6. Найдите все такие действительные значения параметра a, при которых существует ровно одно комплексное число z, действительная и мнимая части которого выражены целыми числами, удовлетворяющими одновременно двум условиям $|z - 5 - 5i| < a$ и $|zi - 5 - 5i| < a$.

Работа 3

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}(x^2+2x+16-2\sqrt{55})<2$.
2. Найдите все комплексные числа *z*, удовлетворяющие уравнению $\overline{z}^3=(2-\sqrt{3}i)^3$.
3. Решите уравнение $|3\sin x+5\cos x|=3\sin x-7\cos x$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x)=2^{-x}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ и касательной к графику функции $g(x)$ в его точке с абсциссой 16.
5. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель при одном у первого 0,7, у второго и третьего — по 0,8. Каждый стрелок делает ровно по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель будет поражена ровно один раз?
6. Для каждого значения параметра *a*, решите неравенство $x+\sqrt{10x}\le x+2+\sqrt{a+9x+2}$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3})<2$.
2. Найдите все комплексные числа *z*, удовлетворяющие уравнению $\overline{z}^4=(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)^4$.
3. Решите уравнение $|2\sin x-8\cos x|=3\sin x+8\cos x$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x)=3^x$, $g(x)=\dfrac{3}{x}$ и касательной к графику функции $g(x)$ в его точке с абсциссой 6.
5. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель при одном у первого и второго стрелков 0,6, а у третьего — по 0,5. Каждый стрелок делает ровно по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель будет поражена ровно два раза?
6. Для каждого значения параметра *b*, решите неравенство $x+\sqrt{5x}\le 3-b+\sqrt{3+4x-b}$.