Сайт элементарной математики
Дмитрия Гущина
www.mathnet.spb.ru

# Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 2000 год

математические классы

**Работа 1**

## Вариант 1

1. Найдите критические точки, промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции $g(t) = t^2 + 6\sqrt[3]{t}$ .
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $f(x) = (x-1)|x|$.
3. Решите неравенство $3^{2p^2-p+2} - 5^{2p^2-p-1} > 5^{2p^2-p+1} + 3^{2p^2-p-1}$ .
4. Известно, что комплексные числа $z$ и $2\overline{z} - 1 + i$ имеют одинаковый модуль. В каких пределах может изменяться значение этого модуля?
5. При каких значениях параметра $a$ уравнение $\sin^2 x - a^2 \cos x = a$ имеет нечетное число корней на промежутке $(-7\pi; 7\pi]$?
6. Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{7}}(x^3 - 5x - 1) \le 0$ . (Не разрешается использовать микрокалькулятор и таблицы).

## Вариант 2

1. Найдите критические точки, промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции $f(x) = x - 5\sqrt[5]{x}$ .
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $g(x) = |x|(x+2)$ .
3. Решите неравенство $2^{t^2+t+1} - 3^{t^2+t} \ge 3^{t^2+t-1} - 2^{t^2+t}$ .
4. Известно, что комплексные числа $z$ и $2 + i - \frac{1}{2}\overline{z}$ имеют одинаковый модуль. В каких пределах может изменяться значение этого модуля?
5. При каких значениях параметра $a$ уравнение $\sin^2 x + 2a\cos x = a^2$ имеет нечетное число корней на промежутке $(-5\pi; 5\pi]$?
6. Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{19}-\sqrt[3]{6}}(x^3 - 13x + 19) < 0$ . (Не разрешается использовать микрокалькулятор и таблицы).

**Работа 2**

## Вариант 1

1. Найдите все комплексные числа с положительной мнимой частью, удовлетворяющие уравнению $z^2+15-8i=0$.
2. Изобразите на координатной плоскости $(x;\, y)$ множество точек, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases} |y|-x^2+4|x|-4\le 0, \\ |x|\le 2 \end{cases}$ и вычислите площадь фигуры, состоящей из этих точек.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=(2x+3)\sqrt{2x+3}+x^2$, не имеющих общих точек с прямой $y=x$.
4. Какова вероятность того, что четырехзначное число, в десятичной записи которого используются по одному разу цифры 5; 2; 3; 1, и только они, делится на 4?
5. Решите неравенство $\log_{2-2^y}\dfrac{2^{2y+5}-7\left(\dfrac{1}{2}\right)^y}{2^{1-y}-1}+1\le 0$.
6. При каких значениях параметра $a$ существует хотя бы одно значение $b$ такое, что на промежутке $(b;\, b+4\pi)$ уравнение $3\cos x+4\sin x=a$ имеет ровно один корень? Для каждого такого $a$ укажите все значения $b$.

## Вариант 2

1. Найдите все комплексные числа с отрицательной мнимой частью, удовлетворяющие уравнению $z^2-5-12i=0$.
2. Изобразите на координатной плоскости $(x;\, y)$ множество точек, удовлетворяющих условию $|y|+x^2-2|x|-3\le 0$ и вычислите площадь фигуры, состоящей из этих точек.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции $g(x)=(1-x)\sqrt{1-x}-x^2$, не имеющих общих точек с прямой $y=3x$.
4. Какова вероятность того, что четырехзначное число, в десятичной записи которого используются по одному разу цифры 1; 2; 7; 5, и только они, делится на 25?
5. Решите неравенство $\log_{2^t-1}(9\cdot 2^{3-2t}-2^{t+1})-2\le 0$.
6. При каких значениях параметра $a$ существует хотя бы одно значение $b$ такое, что на промежутке $(b-2\pi;\, b+2\pi)$ уравнение $4\cos x-3\sin x=a$ имеет ровно один корень? Для каждого такого $a$ укажите все значения $b$.

**Работа 3**

## Вариант 1

1. Среди комплексных чисел $z$ с аргументом $\dfrac{\pi}{4}$ найдите все такие, для которых $\operatorname{Im}(8z - z^3) = 0$, где $z \neq 0$.
2. Решите уравнение $2|\cos x| - 3\cos x - 4|\sin x| - 5\sin x = 0$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}(11 - 2x^2) = \log_{\frac{1}{5}}(2y^2 - 5xy + 11), \\ \log_y x^3 + \log_{2x} y - 5 = 0. \end{cases}$
4. Найдите все первообразные функции $f(x) = 6x - 2$, для которых выполняются два условия: на промежутке (1; 2) графики функций $f(x)$ и $F(x)$ не имеют общих точек и площадь фигуры, ограниченной этими графиками и прямыми $x = 1$ и $x = 2$, равна 1.
5. Исследуйте на выпуклость функцию $y = \sqrt[50]{x}$ и, используя полученный результат, сравните числа $\dfrac{\sqrt[50]{2} + \sqrt[50]{3}}{2}$ и $\sqrt[50]{2,5}$.
6. При каких значениях параметра $a$ ровно три точки графика функции $y = 4x^3 + 2x^2 + a$ равноудалены от осей координат?

## Вариант 2

1. Среди комплексных чисел $z$, что $(z + \overline{z})(z - \overline{z}) = 4i\sqrt{3}$ найдите все числа с аргументом $\dfrac{\pi}{3}$.
2. Решите уравнение $4|\cos x| + 6\cos x - 5|\sin x| + 3\sin x = 0$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_{\frac{3}{10}}(3 - x^2) = \log_{\frac{3}{10}}(8y^2 - 6xy + 3), \\ \log_y x + \log_x (2y) = -1. \end{cases}$
4. Найдите все первообразные функции $f(x) = 6x + 2$, для которых выполняются два условия: на промежутке (2; 3) графики функций $f(x)$ и $F(x)$ не имеют общих точек и площадь фигуры, ограниченной этими графиками и прямыми $x = 2$ и $x = 3$, равна 11.
5. Исследуйте на выпуклость функцию $y = x^{100}$ и, используя полученный результат, сравните числа $\dfrac{3^{100} + 2^{100}}{2}$ и $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{100}$.
6. При каких значениях параметра $a$ ровно три точки графика функции $y = x^3 - x^2 + a$ равноудалены от осей координат?

**Работа 4**

## Вариант 1

1. Решите уравнение $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x + \sin^2 \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}$.
2. Пусть $f(x;\, y) = \log_{\frac{y}{2+x^2}} \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - y^2 + \frac{6x}{y} \right) + 1$. При каких $x$ выражение $f(x;\, 2)$ принимает неотрицательные значения?
3. Изобразите на комплексной плоскости множество таких комплексных чисел $z$, для которых числа $z$ и $2\overline{z} + 4 - 4i$ имеют одинаковый аргумент.
4. Какова вероятность того, что пятизначное число, в десятичной записи которого используются по одному разу цифры 3; 7; 2; 0; 4, и только они, нечетное?
5. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $t^5 - 5t^4 + at + b = 0$ для любого значения параметра $b$ имеет ровно один корень.
6. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \int\limits_{-2}^{x} \frac{\sin \frac{\pi t}{4}}{t^2 + 2} dt$ в точке графика с абсциссой $x_0 = 2$.

## Вариант 2

1. Решите уравнение $\cos^2 2x + \cos^2 4x + \cos^2 6x = \frac{3}{2}$.
2. Пусть $g(x;\, y) = 1 - \log_{x+y^2}(x^2 + xy + 3y - 1)$. При каких $x$ выражение $g(1;\, y)$ принимает неотрицательные значения?
3. Изобразите на комплексной плоскости множество таких комплексных чисел $z$, для которых числа $z$ и $2 + 4i - \overline{z}$ имеют одинаковый аргумент.
4. Какова вероятность того, что пятизначное число, в десятичной записи которого используются по одному разу цифры 8; 7; 5; 0; 9, и только они, нечетное?
5. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $\frac{1}{5}u^5 - au^4 + 3u + b = 0$ для любого значения параметра $b$ имеет ровно один корень.
6. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \int\limits_{-4}^{x} \frac{t \cdot e^{t^2 - 16}}{3 + \cos \pi t} dt$ в точке графика с абсциссой $x_0 = 4$.

## Ответы к вариантам

**Работа 1**

### Ответы к варианту 1

**1.** а) критические точки: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$; б) функция убывает на $(-\infty; -1]$, функция возрастает на $[-1; +\infty)$; в) $f_{\min} = f(-1) = -5$. **2.** $\frac{1}{6}$. **3.** $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **4.** $\left[\frac{2}{3\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right]$. **5.** $a = \pm 1$. **6.** $[-2; 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty)$.

### Ответы к варианту 2

**1.** а) критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; б) функция убывает на $(-\infty; 1]$, функция возрастает на $[1; +\infty)$; в) $f_{\min} = f(1) = -4$. **2.** $\frac{4}{3}$. **3.** $[-2; 1]$. **4.** $\left[\frac{10}{3\sqrt{5}}; 2\sqrt{5}\right]$. **5.** $a = \pm 2$. **6.** $(-1-\sqrt{10}; 2) \cup (\sqrt{10}-1; +\infty)$.