Сайт элементарной математики
Дмитрия Гущина
www.mathnet.spb.ru

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 2005 год
математические классы

Решения задач первого варианта

1. Найдите все комплексные числа z, такие, что $z+\overline{z}=3zi$.
Пусть $z=x+iy$.
Тогда имеем

$$x+iy+x-iy=3(x+iy)i \Leftrightarrow (2x+3y)-3xi=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=0, \\ 3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

Откуда $z=0$.
Ответ: $\{0\}$.

2. Решите неравенство $\log_{9-x}(x^2-5x+4)\le 1$.
1 способ. Найдем область определения неравенства:

$$\begin{cases} x^2-5x+4>0, \\ 9-x>0, \\ 9-x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1, \\ 4<x<8, \\ 8<x<9. \end{array}\right.$$

В зависимости от величины основания логарифма рассмотрим два случая:
1. Основание больше 1, $9-x>1 \Leftrightarrow x<8$, имеем,

$$\log_{9-x}(x^2-5x+4)\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1, \\ 4<x<8, \end{array}\right. \\ x^2-5x+4\le 9-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1, \\ 4<x<8, \end{array}\right. \\ x^2-4x-5\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le x\le 1, \\ 4<x\le 5. \end{array}\right.$$

2. Основание меньше 1, $9-x<1 \Leftrightarrow x>8$, имеем,

$$\log_{9-x}(x^2-5x+4)\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 8<x<9, \\ x^2-5x+4\ge 9-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8<x<9, \\ x^2-4x-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8<x<9.$$

Объединяя результаты, получаем ответ: $[-1;\,1)\cup(4;\,5]\cup(8;\,9)$.

2 способ.

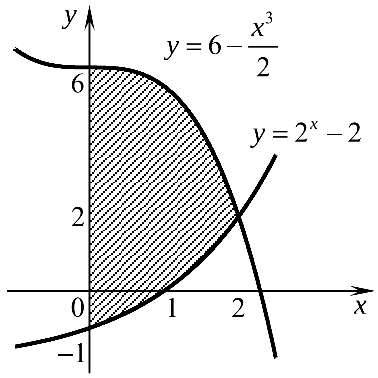
$$\log_{9-x}(x^2-5x+4)\le 1 \Leftrightarrow \log_{9-x}(x^2-5x+4)\le \log_{9-x}(9-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((9-x)-1)((x^2-5x+4)-(9-x))\le 0, \\ 9-x>0, \\ 9-x\ne 1, \\ x^2-5x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8-x)(x^2-4x-5)\le 0, \\ x<9, \\ x\ne 8, \\ \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le x<1, \\ 4<x\le 5, \\ 8<x<9. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-1;\,1)\cup(4;\,5]\cup(8;\,9)$.

3. Изобразите на координатной плоскости фигуру, ограниченную линиями $y = 6 - \frac{x^3}{2}$, $y = 2^x - 2$ и прямой $x = 0$, и найдите площадь этой фигуры.

Пусть $f(x) = 6 - \frac{x^3}{2}$, $g(x) = 2^x - 2$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}$. Так как функция $f(x)$ монотонно убывает, а функция $g(x)$ монотонно возрастает, то графики этих функций имеют не более одной общей точки. Это точка $(2; 2)$. На отрезке $[0; 2]$ верно неравенство $f(x) \geq g(x)$. Тогда



$$S_{\text{фиг.}} = \int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 \left(6 - \frac{x^3}{2} - 2^x + 2\right)dx =$$

$$= 8x\Big|_0^2 - \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 - \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 = 16 - 2 - \frac{4}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = 14 - \frac{3}{\ln 2}.$$

Ответ: $14 - \frac{3}{\ln 2}$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos y = x + 4, \\ \sin y = x + 3. \end{cases}$

1 способ.

$$\begin{cases} \cos y = x + 4, \\ \sin y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = x + 4, \\ \cos y - \sin y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y - 4, \\ \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \cos y - 4, \\ y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \cos y - 4, \\ y + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \cos y - 4, \\ y = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \cos y - 4, \\ y = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3, \\ y = 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

2 способ.

Из системы следует, что

$$(x + 4)^2 + (x + 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Тогда исходная система равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4, \\ \cos y = 0, \\ \sin y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3, \\ \cos y = -1, \\ \sin y = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3, \\ y = 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\left(-4; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); (-3; 2\pi k) : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник *ABC*, если точки *B* и *C* лежат на оси абсцисс, $BC = 4$, а точка *A* лежит на графике функции $f(x) = x^4 - 4x + 55$?
1 способ.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = 2AH \ ,$$

где *AH* — высота треугольника *ABC*, равная расстоянию от точки графика функции $f(x)$ до оси абсцисс. Найдем ближайшую к оси абсцисс точку этого графика. Заметим, что $f'(x) = 4x^3 - 4$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ и $f'(x) > 0$ при $x > 1$, $f'(x) < 0$ при $x < 1$. Поэтому $x = 1$ — точка минимума функции $f(x)$. Поскольку $f(x)$ непрерывна и не имеет других экстремумов, $f(1) = 52 > 0$ — наименьшее значение функции $f(x)$. Таким образом, наименьшее значение высоты есть $AH = 52$ и, следовательно, наименьшая возможная площадь треугольника равна 104.

2 способ.
Пусть x_0 — абсцисса точки *A*, тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |BC| \cdot |f(x_0)| = 2|f(x_0)| \ .$$

Поскольку
$$f(x) = x^4 - 4x + 55 = (x^2 - 1)^2 + 2(x-1)^2 + 52 \geq 52,$$

и $f(1) = 52$, искомая наименьшая площадь есть $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 52 = 104$.

Ответ: 104.

6. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $(x + 4a)\sqrt{x - 4a - 32} = 0$ имеет единственное решение.
1 способ.

$$(x+4a)\sqrt{x-4a-32} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4a + 32, \\ x = -4a, \end{array}\right. \\ x \geq 4a + 32. \end{cases}$$

Полученная система должна иметь единственное решение, откуда

$$\left[\begin{array}{l} -4a = 4a + 32, \\ -4a < 4a + 32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4, \\ a > -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \geq -4 \ .$$

2 способ.

$$(x+4a)\sqrt{x-4a-32} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4a + 32, \\ \begin{cases} x = -4a, \\ x \geq 4a + 32 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4a + 32, \\ \begin{cases} x = -4a, \\ -4a \geq 4a + 32 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4a + 32, \\ \begin{cases} x = -4a, \\ a \leq -4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Полученная система имеет единственное решение в одном из следующих двух случаев: система, содержащаяся в совокупности, не имеет решения, откуда $\grave{a} > -4$; система, содержащаяся в совокупности, имеет решение, совпадающее с решением уравнения $x = 4a + 32$, откуда $a = -4$.
Ответ: $a \geq -4$.