

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 2002 год
физико-математические классы

Решения задач первого варианта

1. Решите уравнение $\cos \frac{x}{14} - \cos \frac{x}{7} = 1$.

Решение.

$$\cos \frac{x}{14} - \cos \frac{x}{7} = 1 \Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{x}{14} - \cos \frac{x}{14} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{14} = 0, \\ \cos \frac{x}{14} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7\pi + 14\pi k, \\ x = \frac{14}{3}\pi + 28\pi k, \\ x = -\frac{14}{3}\pi + 28\pi k; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ 7\pi + 14\pi k; \frac{14}{3}\pi + 28\pi k; -\frac{14}{3}\pi + 28\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Решите неравенство $\frac{e^{3x-1} - 1}{x+8} \geq 0$.

Решение.

$$\frac{e^{3x-1} - 1}{x+8} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3}, \\ x < -8. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -8) \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty \right)$.

3. Решите уравнение $(3 - 2^x) \log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+1}{4x+7} = |2^x - 3|$.

Решение.

$$(3 - 2^x) \log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+1}{4x+7} = |2^x - 3| \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3, \\ \frac{2x+1}{4x+7} > 0, \\ x > \log_2 3, \\ \log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+1}{4x+7} = -1, \\ x < \log_2 3, \\ \log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+1}{4x+7} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3, \\ x > \log_2 3, \\ \frac{2x+1}{4x+7} = 3, \\ x < \log_2 3, \\ \frac{2x+1}{4x+7} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3, \\ x > \log_2 3, \\ x = -2, \\ x < \log_2 3, \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \log_2 3.$$

Ответ: $\{\log_2 3\}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{1}{9}x^3$ и $y = \sqrt{3x}$.

Решение. Найдём точки пересечения графиков функций:

$$\sqrt{3x} = \frac{1}{9}x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{9}x^3 \geq 0, \\ 3x = \frac{1}{81}x^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^6 - 243x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 0, \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3. \end{cases}$$

Таким образом, площадь фигуры равна:

$$S = \int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{1}{9}x^3 \right) dx = \left(\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{1}{9} \cdot \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^3 = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4}.$$

Ответ: $\frac{15}{4}$.

5. При каких значениях параметра a число 2 является точкой минимума функции $f(x) = (2x - a)^6(x + a - 1)^4$?

Решение.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12(2x - a)^5(x + a - 1)^4 + (2x - a)^6 \cdot 4(x + a - 1)^3 = \\ &= 4(2x - a)^5(x + a - 1)^3(5x + 2a - 3). \end{aligned}$$

Поочередно приравнявая к 2 один из корней производной $\frac{a}{2}$ или $1 - a$, или $\frac{3 - 2a}{5}$, получим, что $a = 4$, $a = -1$, $a = -\frac{7}{2}$. Для каждого из найденных a вычислим оставшиеся корни производной.

Имеем тройки: $2, -3, -\frac{1}{7}$; $-\frac{1}{2}, 2, \frac{4}{7}$; $-\frac{7}{4}, \frac{9}{2}, 2$. Так как все три корня производной различны, точка минимума — наибольший или наименьший из них, что соответствует первым двум случаям. Тогда искомые значения параметра: 4 и -1 .

Ответ: $\{-1; 4\}$.

6. Найдите абсциссы всех общих точек графиков функций $f(x) = 3 - \sqrt{x - 3 + 2\sqrt{x - 4}}$ и $g(x) = \sqrt{x - 4} - 4\sqrt{x - 4}$.

Решение.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 3 - \sqrt{(\sqrt{x - 4} + 1)^2} = \sqrt{(\sqrt{x - 4} - 2)^2} \Leftrightarrow 3 - |\sqrt{x - 4} + 1| = |\sqrt{x - 4} - 2| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |2 - \sqrt{x - 4}| = 2 - \sqrt{x - 4} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

Ответ: $[4; 8]$.