Сайт элементарной математики
Дмитрия Гущина
www.mathnet.spb.ru

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 2003 год
физико-математические классы

Решения задач первого варианта

1. Найдите наименьшее целое число x, удовлетворяющее неравенству $4^x+6\cdot 13^x \ge 13240$.

Решение. При $x=2$ левая часть равна 1030, а при $x=3$ — 13146. В силу монотонного возрастания правой части уравнения имеем ответ: 3.

Ответ: $\{3\}$.

2. Решите уравнение $\sin x\sin 3x=\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}$.

Решение. Поскольку

$$\sin x\sin 3x-\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos 4x-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos 2x-2\cos^2 2x+1-\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos^2\frac{2\pi}{7}-1\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(2\left(\cos^2 2x-\cos^2\frac{2\pi}{7}\right)-\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(2\cos 2x+2\cos\frac{2\pi}{7}-1\right),$$

имеем

$$\sin x\sin 3x=\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{7},\\ \cos 2x=\frac{1}{2}-\cos\frac{2\pi}{7}\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{7}+\pi k,\\ x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{2\pi}{7}\right)+\pi k;\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{7}+\pi k;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{2\pi}{7}\right)+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. Решите уравнение $\log_5^2(x-3)^2+3\log_5(15-5x)-10=0$.

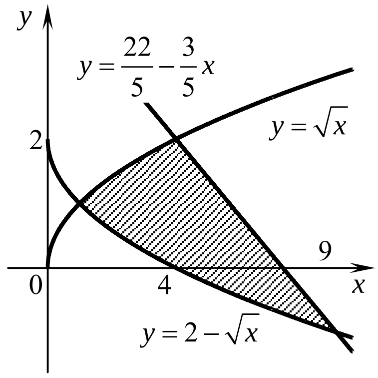
Решение.

$$\log_5^2(x-3)^2+3\log_5(15-5x)-10=0\Leftrightarrow 4\log_5^2(3-x)+3\log_5(3-x)-7=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_5(3-x)=1,\\ \log_5(3-x)=-\frac{7}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=3-5^{-\frac{7}{4}}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2;\ 3-5^{-\frac{7}{4}}\}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x}$ и $3x + 5y - 22 = 0$.

Решение.



$$S = \int_1^4 (\sqrt{x} - (2 - \sqrt{x}))dx + \int_4^9 \left(-\frac{3}{5}x + \frac{22}{5} - (2 - \sqrt{x}) \right) dx =$$

$$= \int_1^4 (2\sqrt{x} - 2)dx + \int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{3}{5}x + \frac{12}{5} \right) dx =$$

$$= \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 - 2x\Big|_1^4 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_4^9 - \frac{3}{5} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_4^9 + \frac{12}{5} x \Big|_4^9 = \frac{17}{2}.$$

Ответ: $\frac{17}{2}$.

5. Найдите множество значений функции $y = 3x + \sqrt{7 - 2x}$.

Решение. Пусть $\sqrt{7 - 2x} = t$, тогда $x = \frac{1}{2}(7 - t^2)$, $t \geq 0$, и $E(y) = E(f)$, где $f(t) = \frac{21}{2} - \frac{3}{2}t^2 + t$, $t \geq 0$. Но $E(f) = \left(-\infty;\ f\left(\frac{1}{3}\right) \right] = \left(-\infty;\ \frac{32}{3} \right]$.

Ответ: $E(f) = \left(-\infty;\ \frac{32}{3} \right]$.

6. Найдите все отрицательные значения параметра *a*, для каждого из которых касательные к параболе $y = (x-1)^2$, проведенные через точку оси *Oy* с ординатой *a*, высекают на оси *Ox* отрезок длины 4.

Решение. Касательные к параболе $y = (x-1)^2$ с абсциссой точки касания x_0 имеют вид

$$y = 2(x_0 - 1)(x - x_0) + (x_0 - 1)^2,$$

и пересекаются с осью абсцисс в точках ($x_0 \neq 1$) $x = -\frac{(x_0 - 1)^2}{2(x_0 - 1)} + x_0 = \frac{x_0 + 1}{2}$. Тогда длина высекаемого на оси *Ox* отрезка, равная 4, есть $\frac{x_+ + 1}{2} - \frac{x_- + 1}{2} = \frac{x_+ - x_-}{2}$, где $x_\pm$ — положительная и отрицательная абсциссы точек касания. Определим их из условия $y(0) = a$:

$$a = 2(x_0 - 1)(-x_0) + (x_0 - 1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \sqrt{1 - a}, \\ x_0 = -\sqrt{1 - a}. \end{array} \right.$$

Решая уравнение $\frac{2\sqrt{1 - a}}{2} = 4$, получим ответ: $a = -15$.

Ответ: $a = -15$.