Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 2004 год
физико-математические классы

Решения задач первого варианта

1. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = 2\sin x$.

Решение.

$$\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = 2\sin x \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\sin 3x\right) = 2\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos 3x + \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + \frac{\pi}{3} = x + 2\pi k, \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \pi - x + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2};\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Сравните числа $\sqrt{56}$ и $\log_2 65$.

Решение.

$$\sqrt{56} > \sqrt{49} = 7 = \log_2 128 > \log_2 65.$$

Ответ: $\sqrt{56} > \log_2 65$.

3. Решите уравнение $(x^2 - 16)\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = 0$.

Решение.

$$(x^2 - 16)\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 16 = 0, \\ \log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4, \\ 2x + 1 = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4, \\ x = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0;\ 4\}$.

4. Исследуйте функцию $f(x)=x^2-6x+8\sqrt{x}$ на монотонность.

Р е ш е н и е. Область определения функции — луч $[0;+\infty)$.

$$f'(x)=2x-6+\frac{4}{\sqrt{x}};$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-6+\frac{4}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow 2x\sqrt{x}-6\sqrt{x}+4=0.$$

Пусть $\sqrt{x}=t$.
Решим уравнение

$$2t^3-6t+4=0\Leftrightarrow t^3-3t+2=0\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2, \\ t=1. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=-2 - \text{решений нет}, \\ \sqrt{x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1.$$

Итак, функция монотонно возрастает на $[0;+\infty)$.

Ответ: функция возрастает на $[0;+\infty)$.

5. Решите неравенство $2^{\frac{3}{x-1}}\ge\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е.

$$2^{\frac{3}{x-1}}\ge\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{\frac{3}{x-1}}\ge 2^{\frac{1}{2}}\underset{2>1}{\Leftrightarrow}\frac{3}{x-1}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{x-1}-\frac{1}{2}\ge 0\Leftrightarrow\frac{6-x+1}{2(x-1)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{7-x}{2(x-1)}\ge 0\Leftrightarrow\frac{x-7}{x-1}\le 0.$$

Ответ: $(1;\,7]$.

6. При каких положительных значениях параметра a площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2\sqrt{x}$, $y=-x$, $x=a$, $x=4a$ равна $\frac{101}{6}$?

Р е ш е н и е.

$$S=\int_a^{4a}(2\sqrt{x}+x)dx=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_a^{4a}+\frac{1}{2}x^2\Bigg|_a^{4a}=$$

$$=\frac{4}{3}(4a\sqrt{4a}-a\sqrt{a})+\frac{1}{2}((4a)^2-a^2)=\frac{28a\sqrt{a}}{3}+\frac{15a^2}{2}.$$

Решим уравнение

$$\frac{28a\sqrt{a}}{3}+\frac{15a^2}{2}=\frac{101}{6}\Leftrightarrow 56a\sqrt{a}+45a^2=101.$$

Пусть $\sqrt{a}=t$.
Решим уравнение

$$45t^4+56t^3-101=0\Leftrightarrow (t-1)(45t^3+101t^2+101t+101)=0\Leftrightarrow t=1.$$

Таким образом,

$$\sqrt{a}=1\Leftrightarrow a=1.$$

Ответ: при $a=1$.