Сайт элементарной математики
Дмитрия Гущина
www.mathnet.spb.ru

Выпускной экзамен по алгебре и началам анализа, 2005 год
физико-математические классы

Решения задач первого варианта

1. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке $(-2;\,4)$. Найдите $f'(-2)$.

Значение производной в точке -2 равно значению тангенса угла наклона касательной к графику в этой точке. Поскольку известно, что касательная проходит через начало координат и через точку $(-2;\,4)$, находим искомый угловой коэффициент как частное: $-4:2=-2$.

Ответ: -2.

2. Найдите значение выражения $\log_{\frac{a}{b}}\sqrt[3]{a^8b^2}$, если $\log_a b = 11$.

1 способ. Перейдем к основанию a:

$$\log_{\frac{a}{b}}\sqrt[3]{a^8b^2}=\frac{\log_a\left(a^{\frac{8}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\right)}{\log_a\frac{a}{b}}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\log_a b}{1-\log_a b}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\cdot 11}{1-11}=-1.$$

2 способ. Из условия $\log_a b = 11$ имеем $b = a^{11}$. Тогда

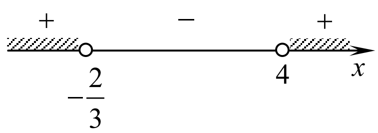
$$\log_{\frac{a}{b}}\sqrt[3]{a^8b^2}=\log_{\frac{a}{a^{11}}}\sqrt[3]{a^8(a^{11})^2}=\log_{a^{-10}}\sqrt[3]{a^{30}}=\log_{a^{-10}}a^{10}=-1.$$

Ответ: -1.

3. Решите неравенство $\dfrac{(5\sqrt{5})^x-\frac{1}{5}}{x-4}>0$.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{(5\sqrt{5})^x-\frac{1}{5}}{x-4}>0 \Leftrightarrow \frac{5^{\frac{3}{2}x}-5^{-1}}{x-4}>0$$



Ответ: $\left(-\infty;\,-\frac{2}{3}\right)\cup(4;\,+\infty)$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}$ на промежутке $[5;\,8]$.

1 способ. Сравним значения функции в точках экстремума, принадлежащих отрезку $[5;\,8]$ со значениями функции на концах этого отрезка.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-4}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}},$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-4}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}=0 \text{ — решений нет.}$$

Таким образом, функция не имеет экстремумов и ее наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах заданного отрезка.

$$f(5)=\sqrt{5-4}-\sqrt{5+1}=1-\sqrt{6}\,;\ f(8)=\sqrt{8-4}-\sqrt{8+1}=2-3=-1\,.$$

2 способ. Преобразуем выражение, задающее функцию:

$$f(x)=\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}=\frac{(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}}=-\frac{5}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}}\,.$$

Откуда очевидно, что заданная функция возрастает на всей области определения. Тогда ее наибольшее значение есть $f(8)=-1$, а наименьшее $f(5)=1-\sqrt{6}$.

Ответ: наименьшее значение: $1-\sqrt{6}$, наибольшее значение: -1.

5. Решите уравнение $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-2}{\sqrt{-\cos x}}=0$.

ОДЗ:

$$-\cos x>0 \Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right).$$

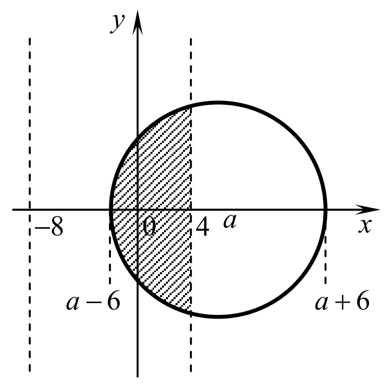
Решим уравнение $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-2=0$:

$$\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-1,\\ \operatorname{tg} x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ x=\operatorname{arctg}2+\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Поскольку подкоренное выражение должно существовать и знаменатель дроби должен быть отличен от нуля, имеем $-\cos x>0 \Leftrightarrow \cos x<0$. Полученному условию найденных решений удовлетворяют лишь $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$ и $x=\pi+\operatorname{arctg}2+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, что и дает ответ.

Ответ: $\left\{\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \pi+\operatorname{arctg}2+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} y^2+x^2-2ax\le 36-a^2,\\ (x+2)^2\le 36\end{cases}$ равна 18π?



Преобразуем заданную систему:

$$\begin{cases} y^2+x^2-2ax\le 36-a^2,\\ (x+2)^2\le 36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+(x-a)^2\le 36,\\ |\,x+2\,|\le 6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+(x-a)^2\le 36,\\ -8\le x\le 4.\end{cases}$$

Первое уравнение системы задает круг радиуса 6 с центром в точке $(a;0)$. Поскольку площадь этого круга есть $S_{\text{кр.}}=36\pi$, внутри полосы, задаваемой двойным неравенством $-8\le x\le 4$, должна лежать его левая или правая половина (см. рис.). Это возможно, если центр круга лежит в точках $(4;0)$ или $(-8;0)$. Таким образом искомые значения параметра суть $a=-8$ и $a=4$.

Ответ: $a=-8$ и $a=4$.