Сайт элементарной математики
Дмитрия Гущина
www.mathnet.spb.ru

Задания для классов, занимающихся по базовой программе, 1995 год

Из двух сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 1

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = -2 \cdot 3^x$.

а) Вычислите $f(\log_2 56 + \log_{0,5} 7)$.

б) Решите уравнение $f(x) - f(3-x) = -12$.

в) Решите неравенство $f(x) - f(3-x) \ge 12$.

г) Решите систему уравнений $\begin{cases} f(x) - f(y) = -2, \\ f(x+y) = -54. \end{cases}$

2. Дана функция $f(x) = \cos x$.

а) Вычислите $f(2\alpha)$, если известно, что $f(\alpha) = \dfrac{1}{3}$.

б) Решите уравнение $f(x) + f(3x) = f(2x)$.

в) Докажите, что $f(x) - f(2x) + f(3x) = (2\cos^2 x - 1)(2\cos x - 1)$.

г) Решите неравенство $\dfrac{f(x) - f(2x) + f(3x)}{f(2x)} < 0$ на отрезке $[0;\, \pi]$.

Сюжеты на выбор
(выбирается один из двух)

3.А. Дана функция $f(x) = \sqrt{2x + a} - \sqrt{2 - x}$.

а) Найдите все значения параметра a такие, что число $x_0 = 1$ является корнем уравнения $f(x) = 2$.

б) Пусть $a = 7$. Решите уравнение $f(x) = 2$.

в) Пусть $a = 7$. Сравните числа $|f(-2)|$ и $|f(-1)|$.

г) Найдите все значения параметра a такие, что областью определения функции $y = f(x)$ является отрезок.

3.Б. Дана функция $f(x) = x^2 - 3x$.

а) Найдите первообразную $y = F(x)$ функции $y = f(x)$, график которой проходит через точку с координатами $(6;\, 18)$.

б) Постройте график найденной первообразной.

в) Найдите уравнение касательной к графику найденной первообразной $y = F(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$, $y = F(x)$ и отрезком $[0;\, 3]$ оси абсцисс.

Задания для классов, занимающихся по базовой программе, 1995 год

Из двух сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

а) Вычислите $f\left(\log_3 \frac{1}{54} + \log_3 2\right)$.

б) Решите уравнение $f(-3-x) - f(x) = -6$.

в) Решите неравенство $f(-3-x) - f(x) \geq -6$.

г) Решите систему уравнений $\begin{cases} f(y) - f(x) = -6, \\ f(x+y) = 24. \end{cases}$

2. Дана функция $f(x) = \sin x$.

а) Вычислите значение $\cos 2\alpha$, если известно, что $f(\alpha) = \frac{1}{4}$.

б) Решите уравнение $f(3x) - f(x) = \cos 2x$.

в) Докажите, что $f(3x) - f(x) - \cos 2x = (1 - 2\sin^2 x)(2\sin x - 1)$.

г) Решите неравенство $\frac{f(3x) - f(x) - \cos 2x}{\cos 2x} < 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Сюжеты на выбор
(выбирается один из двух)

3.А. Дана функция $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{b-2x}$.

а) Найдите все значения параметра b такие, что число $x_0 = -2$ является корнем уравнения $f(x) = -2$.

б) Пусть $b = 5$. Решите уравнение $f(x) = -2$.

в) Пусть $b = 5$. Сравните числа $|f(2)|$ и $|f(0)|$.

г) Найдите все значения параметра b такие, что областью определения функции $y = f(x)$ является отрезок.

3.Б. Дана функция $f(x) = x^2 + 3x$.

а) Найдите первообразную $y = F(x)$ функции $y = f(x)$, график которой проходит через точку с координатами $(-6; -18)$.

б) Постройте график найденной первообразной.

в) Найдите уравнение касательной к графику найденной первообразной $y = F(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -f(x)$, $y = F(x)$ и отрезком $[-3; 0]$ оси абсцисс.

Задания для классов, занимающихся по базовой программе, 1995 год

Ответы к варианту 1

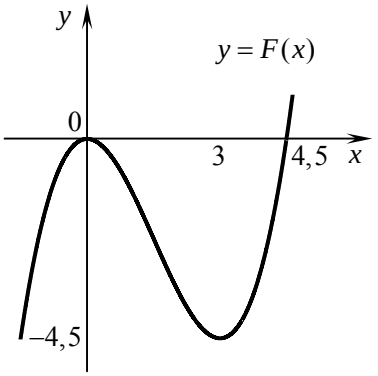
Обязательные задачи

1. а) -54; б) $\{2\}$; в) $(-\infty; 2]$; г) $\{(2; 1)\}$. **2.** а) $-\frac{7}{9}$; б) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; г) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

Сюжеты на выбор
(выбирается один из двух)

3.А. а) $a = 7$; б) $\{1\}$; в) $|f(-1)| > |f(-2)|$; г) $a > -4$.

3.Б. а) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$; б) см. рисунок; в) $y = 0$; г) $\frac{225}{64}$.



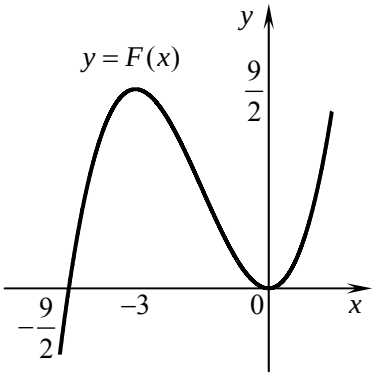
Задания для классов, занимающихся по базовой программе, 1995 год

Ответы к варианту 2

Обязательные задачи

1. а) 24; б) $\{-2\}$; в) $[-2;+\infty)$; г) $\{(-2;-1)\}$. **2.** а) $\frac{7}{8}$; б) $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$;
г) $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right)$.

Сюжеты на выбор
(выбирается один из двух)

3.А. а) $b=5$; б) $\{-2\}$; в) $|f(2)|>|f(0)|$; г) $b>-6$.

3.Б. а) $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}$; б) см. рисунок; в) $y=0$; г) $\frac{225}{64}$.