

Задания для классов, занимающихся по базовой программе, 2001 год

Из четырех предложенных сюжетов следует выбрать три. Таким образом, получится 12 пунктов. Для получения оценки «5» Вам достаточно верно и полностью решить любые 10 из них.

Вариант 1

11.А. Дана функция $f(x) = \log_2(x-3) + \log_2(x-7)$.

- а) Найдите все значения a такие, что $x = 11$ является корнем уравнения $f(x) = a$.
- б) Решите уравнение $f(x) = 5$.
- в) Решите неравенство $f(x) < 5$.
- г) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} f(x) = y, \\ 4^y - 31 \cdot 2^y = 32. \end{cases}$$

24.А. Дана функция $f(x) = \sqrt{21 + 4x - x^2}$.

- а) Найдите область определения данной функции.
- б) Решите уравнение $f(x) = 1 - 3x$.
- в) Сравните числа $f(3) + f(5)$ и $2f(4)$.
- г) Найдите все числа x такие, что выполняется равенство $f(x-1) = f(5-x)$.

24.А. Дана функция $f(x) = \sin 3x - \sin x$.

- а) Докажите, что
$$\frac{f(x)}{f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\operatorname{tg} x.$$
- б) Вычислите $f(\alpha)$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.
- в) Решите уравнение $f(x) = \sin 2x$.
- г) Решите неравенство $\frac{f(x)}{\sin x} \geq -1$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

31.А. Дана функция $f(x) = x - \frac{x^3}{3}$.

- а) Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат.
- б) Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность.
- в) Постройте график функции $y = f(x)$.
- г) Образующая конуса равна $\sqrt{3}$. Найдите наибольший возможный объем такого конуса.

Задания для классов, занимающихся по базовой программе, 2001 год

Из четырех предложенных сюжетов следует выбрать три. Таким образом, получится 12 пунктов. Для получения оценки «5» Вам достаточно верно и полностью решить любые 10 из них.

Вариант 2

11.Б. Дана функция $f(x) = \log_3(x+4) + \log_3(x-2)$.

а) Найдите все значения b такие, что $x = 5$ является корнем уравнения $f(x) = b$.

б) Решите уравнение $f(x) = 3$.

в) Решите неравенство $f(x) > 3$.

г) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} f(y) = y, \\ 9^x - 26 \cdot 3^x - 27 = 0. \end{cases}$$

24.Б. Дана функция $f(x) = \sqrt{24 + 2x - x^2}$.

а) Найдите область определения данной функции.

б) Решите уравнение $f(x) = 3x + 2$.

в) Сравните числа $\frac{f(1) + f(-1)}{2}$ и $f(0)$.

г) Найдите все числа x такие, что выполняется равенство $f(x+3) = f(-1-x)$.

24.Б. Дана функция $f(x) = \cos x - \cos 3x$.

а) Докажите, что $\frac{f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{f(x)} = -\operatorname{ctg} x$.

б) Вычислите $f(\beta)$, если $\cos \beta = \frac{1}{3}$.

в) Решите уравнение $f(x) = 2 \sin x \cdot \sin 4x$.

г) Решите неравенство $\frac{f(x)}{\sin x} \leq 1$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

31.Б. Дана функция $f(x) = 3x - \frac{x^3}{4}$.

а) Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осями координат.

б) Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность.

в) Постройте график функции $y = f(x)$.

г) Длина диагонали осевого сечения цилиндра равна $2\sqrt{3}$. Найдите наибольший возможный объем такого цилиндра.

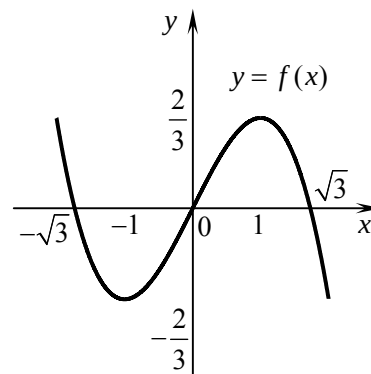
Задания для классов, занимающихся по базовой программе, 2001 год

Ответы к варианту 1

1. а) $a = 5$; б) $\{11\}$; в) $(7; 11)$; г) $\{(11; 5)\}$. 2. а) $[-3; 7]$; б) $\{-1\}$; в) $f(3) + f(5) < 2f(4)$; г) $[2; 8]$.

3. б) $\frac{7}{16}$; в) $\left\{ \pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; г) $\left[-\frac{\pi}{4}; 0 \right) \cup \left(0; \frac{\pi}{3} \right]$.

4. а) $(-\sqrt{3}; 0)$, $(0; 0)$, $(\sqrt{3}; 0)$; б) убывает на $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$,
возрастает на $[-1; 1]$; в) см. рисунок; г) $\frac{2\pi}{3}$.



Задания для классов, занимающихся по базовой программе, 2001 год

Ответы к варианту 2

1. а) $b = 3$; б) $\{5\}$; в) $(5; +\infty)$; г) $\{(3; 5)\}$. 2. а) $[-4; 6]$; б) $\{1\}$; в) $\frac{f(1)+f(-1)}{2} < f(0)$; г) $[-7; 3]$.

3. б) $\frac{32}{27}$; в) $\left\{\frac{\pi k}{2}; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; г) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right) \cup \left(\pi; \frac{13\pi}{12}\right]$.

4. а) $(-2\sqrt{3}; 0)$, $(0; 0)$, $(2\sqrt{3}; 0)$; б) убывает на $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, возрастает на $[-2; 2]$; в) см. рисунок; г) 4π .

