Задания для классов с углубленным изучением математики, 1992 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 1

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}+2\cos x}{2\cos x-\sqrt{3}}$.

а) Решите уравнение $f(x)=-1$.

б) Найдите все решения неравенства $f(x)\ge 0$ из отрезка $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

в) Докажите, что $f(x)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{x}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{x}{2}\right)$.

г) Найдите множество значений функции $f(x)$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

2. Дана функция $f(x)=\log_2(4-x^2)$.

а) Решите неравенство $f(x)\le 0$.

б) Решите уравнение $f(x)=2\log_4(7-4x)$.

в) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$ (в зависимости от параметра a).

Сюжеты на выбор
(выбирается один из трех)

3А. Дана функция $f(x)=x-\sqrt{x+2}$.

а) Напишите уравнение касательной l к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой 7.

б) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-2;2]$.

в) Постройте график функции $f(x)$ на отрезке $[-2;8]$.

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, касательной l и осью абсцисс.

3Б. Даны комплексные числа $z_0=i$ и $z_1=\sqrt{3}$.

а) Изобразите на чертеже множество M всех таких комплексных чисел z, что $|z-z_0|=1$.

б) Изобразите на чертеже множество K всех таких комплексных чисел z, что $|z-z_0|=|z-z_1|$.

в) Найдите все числа, содержащиеся и в K, и в M.

г) Среди чисел, принадлежащих множеству K, найдите число с наименьшим модулем.

3В. Дана функция $f(x)=x^3-(a+1)x^2+(a^2-3)x+2$.

а) Решите уравнение $f(x)=0$ при $a=2$.

б) Решите относительно параметра a неравенство $f(a)\ge 0$.

в) Решите уравнение $f(x)=0$ при условии, что один из его корней равен 2.

г) Выясните, при каких значениях параметра a уравнение $f(x)=b$ имеет единственный корень при любом значении параметра b.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1992 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x)=\dfrac{1-2\sin x}{1+2\sin x}$.

а) Решите уравнение $f(x)=-\dfrac{1}{3}$.

б) Найдите все решения неравенства $f(x)\geq 0$ из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

в) Докажите, что $f(x)=\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{x}{2}\right)$.

г) Найдите множество значений функции $f(x)$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Дана функция $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(4x-x^2)$.

а) Решите неравенство $f(x)\geq -1$.

б) Решите уравнение $f(x)=2\log_9\dfrac{1}{2x-3}$.

в) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x)=a$ (в зависимости от параметра a).

Сюжеты на выбор
(выбирается один из трех)

3А. Дана функция $f(x)=\sqrt{x-1}-x+3$.

а) Напишите уравнение касательной m к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой 2.

б) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[1;5]$.

в) Постройте график функции $f(x)$ на отрезке $[1;7]$.

г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, касательной m и осью абсцисс.

3Б. Даны комплексные числа $z_0=1+i\sqrt{3}$ и $z_1=2$.

а) Изобразите на чертеже множество K всех таких комплексных чисел z, что $|z-z_0|=1$.

б) Изобразите на чертеже множество P всех таких комплексных чисел z, что $|z-z_0|=|z-z_1|$.

в) Найдите все числа, содержащиеся и в K, и в P.

г) Среди чисел, принадлежащих множеству K, найдите число с наибольшим модулем.

3В. Дана функция $f(x)=x^3-x^2+(b^2-4)x-(b+2)$.

а) Решите уравнение $f(x)=0$ при $b=-1$.

б) Решите относительно параметра b неравенство $f(b)\leq 0$.

в) Решите уравнение $f(x)=0$ при условии, что один из его корней равен -1.

г) Выясните, при каких значениях параметра b уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень при любом значении параметра a.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1992 год

Ответы к варианту 1

Обязательные задачи

1. а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]\cup\left(\frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right)$; г) $[1; 7-4\sqrt{3}]$. **2.** а) $(-2; -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}; 2)$; б) $\{1\}$; в) на $(-2; 0]$ функция возрастает; на $[0; 2)$ — убывает; г) если $a<2$, то 2 корня; если $a=2$, то 1 корень; если $a>2$, то корней нет.

Сюжеты на выбор

3А. а) $y=\frac{5}{6}x-\frac{11}{6}$; б) $-\frac{9}{4}$; в) см. рисунок 1; г) $\frac{7}{30}$. **3Б.** а) см. рисунок 2; б) см. рисунок 3; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; г) $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$. **3В.** а) $\left\{2; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$; б) $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\cup[2; +\infty)$; в) $\left\{2; \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ при $a=0$; $\left\{2; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ при $a=2$; г) $a\le\frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $a\ge\frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

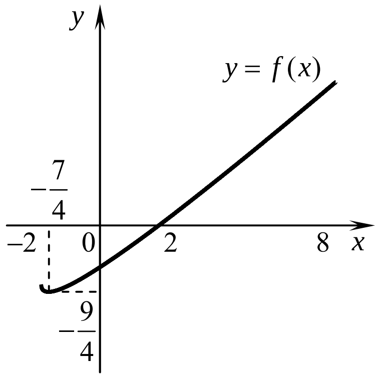

рис. 1

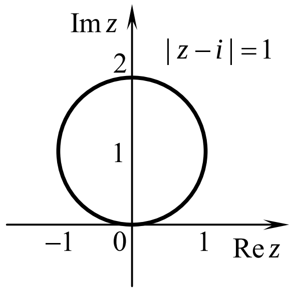

рис. 2

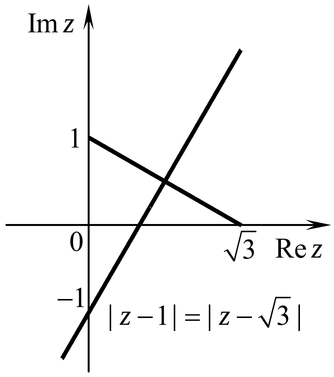

рис. 3

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1992 год

Ответы к варианту 2

Обязательные задачи

1. а) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$; г) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$. **2.** а) $(0; 1)\cup[3; 4)$; б) $\{3\}$; в) на $(0; 2]$ функция убывает; на $[2; 4)$ — возрастает; г) если $a<\log_{\frac{1}{3}}4$, то корней нет; если $a=\log_{\frac{1}{3}}4$, то 1 корень; если $a>\log_{\frac{1}{3}}4$, то 2 корня.

Сюжеты на выбор

3А. а) $y=-\frac{1}{2}x+3$; б) 0 и $\frac{9}{4}$; в) см. рисунок 4; г) $\frac{5}{6}$. **3Б.** а) см. рисунок 5; б) см. рисунок 6; в) $\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$. **3В.** а) $\{-1; 1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\}$; б) $(-\infty; -1]\cup\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$; в) $\{-1; 1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\}$ при $b=-1$; $\{-1; 1\pm\sqrt{3}\}$ при $b=0$; г) $b\geq\frac{\sqrt{13}}{3}$, $b\leq-\frac{\sqrt{13}}{3}$.

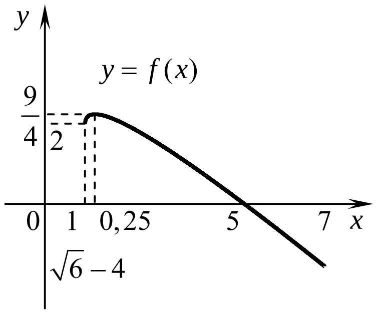

рис. 4

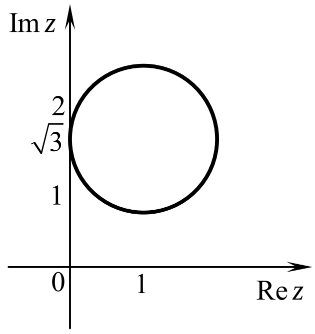

рис. 5

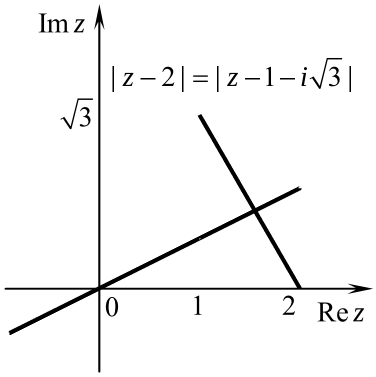

рис. 6