

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1994 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 1

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = 2 \sin x \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.

- а) Решите уравнение $f(x) = 0$.
- б) Решите неравенство $f(x) \geq 2 \sin x$ на интервале $(-\pi; \pi)$.
- в) Найдите наименьшее значение функции $f(x)$.
- г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $\frac{f(x)}{\sin x - a} = 0$ на отрезке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2} \right]$ в зависимости от параметра a .

2. Дана функция $f(x) = \frac{2^{x+2} + 1}{2^x + 1}$.

- а) Вычислите $f\left(\frac{\log_3 5}{\log_3 2}\right)$.
- б) Решите уравнение $f(x) = 3$.
- в) Найдите множество значений функции $f(x)$.
- г) Постройте график функции $f(x)$ на луче $(-\infty; 0]$.

**Сюжеты на выбор
(выбирается один из трех)**

3А. Дана функция $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 4}$.

- а) Решите уравнение $f(x) = 2x$.
- б) Решите неравенство $\frac{f(x)}{3x-2} \geq 1$.
- в) Проверьте, является ли точка с координатами $(2, 5; 3)$ серединой какого-либо отрезка, концы которого лежат на графике функции $f(x)$.
- г) Найдите все значения параметра a такие, что функция $g(x) = f(x - a)$ является четной.

3Б. Дана функция $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$.

- а) Найдите первообразную функции $f(x)$ на множестве $(0; +\infty)$, график которой проходит через точку $A(1; -6)$.
- б) Постройте график функции $f(x)$.
- в) Проверьте, является ли прямая l , заданная уравнением $y = -15x + 23,5$, касательной к графику функции $f(x)$.
- г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми l и $x = 3$.

3В. Дано комплексное число $a = 1 + i$.

- а) Изобразите на чертеже множество всех таких комплексных чисел z , что $|z + a| = |a|$.
- б) Проверьте, являются ли числа a и $-a$ корнями уравнения $z^4 - 3z^3 - 3z^2 + 10 = 0$.
- в) Изобразите на чертеже множество M всех комплексных чисел z таких, что $a\bar{z} + \bar{a}z = |a|$.
- г) Найдите наименьшее значение выражения $|z - a| + |z + a|$ для $z \in M$.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1994 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = 2 \cos x \cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$.
- а) Решите уравнение $f(x) = 0$.
- б) Решите неравенство $f(x) \leq 2 \cos x$ на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right)$.
- в) Найдите наибольшее значение функции $f(x)$.
- г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $\frac{f(x)}{b + \cos x} = 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right]$ в зависимости от параметра b .
2. Дана функция $f(x) = \frac{3^{x+1} + 1}{3^x + 2}$.
- а) Вычислите $f\left(\frac{\log_5 4}{\log_5 3} \right)$.
- б) Решите уравнение $f(x) = 2$.
- в) Найдите множество значений функции $f(x)$.
- г) Постройте график функции $f(x)$ на луче $(-\infty; 0]$.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

- 3А. Дана функция $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$.
- а) Решите уравнение $f(x) = 3 - 2x$.
- б) Решите неравенство $\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{2x-1}$.
- в) Точка $M(1; 3)$ является серединой отрезка с концами на графике функции $f(x)$. Найдите координаты концов отрезка
- г) Найдите все значения параметра b такие, что функция $g(x) = f(x+b)$ является четной.

- 3Б. Дана функция $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.
- а) Найдите первообразную функции $f(x)$ на множестве $(0; +\infty)$, график которой проходит через точку $A(1; 2)$.
- б) Постройте график функции $f(x)$.
- в) Проверьте, является ли прямая l , заданная уравнением $y = -11,25x - 13$, касательной к графику функции $f(x)$.
- г) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми l и $x = 0,5$.

- 3В. Дано комплексное число $b = 1 - i$.
- а) Изобразите на чертеже множество всех таких комплексных чисел z , что $|z - b| = |b|$.
- б) Проверьте, являются ли числа b и $-b$ корнями уравнения $3z^4 + z^3 - z^2 + 14 = 0$.
- в) Изобразите на чертеже множество K всех комплексных чисел z таких, что $b\bar{z} - bz = |b|i$.
- г) Найдите наименьшее значение выражения $|z + b| + |z - b|$ для $z \in K$.

Ответы к варианту 1

Обязательные задачи

1. а) $\left\{ \pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $(-\pi; 0] \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$; в) $-\frac{1}{4}$; г) если $a \neq 0$ и $a \neq -1$, то 3 корня; если $a = 0$, то 1 корень; если $a = -1$, то 2 корня. 2. а) $\frac{7}{2}$; б) $\{1\}$; в) $(1; 4)$; г) см. рисунок 1.

Сюжеты на выбор

- 3А. а) $\{1\}$; б) $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{8} \right]$; в) да, с концами в точках с координатами $(1; 2)$ и $(4; 4)$; г) $a = -\frac{1}{2}$.
 3Б. а) $F(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{8}{x} + \frac{11}{6}$; б) см. рисунок 2; в) да, является, в точке с абсциссой $x_0 = 1$; г) $\frac{871}{120}$.
 3В. а) см. рисунок 3; б) число $-a$ — корень уравнения; в) см. рисунок 4; г) $2\sqrt{2}$.

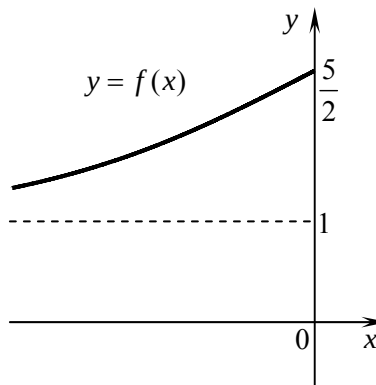


рис. 1

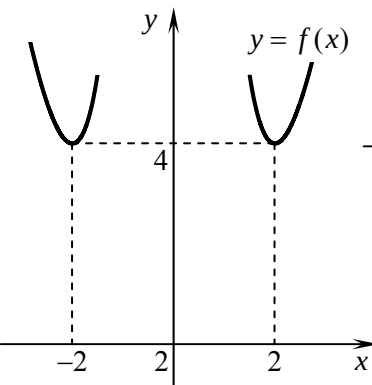


рис. 2

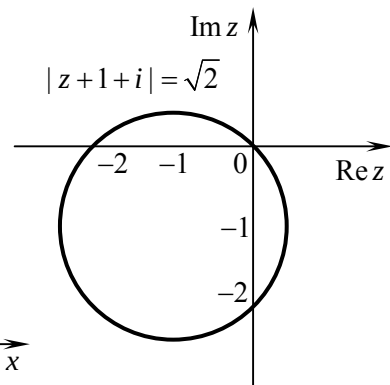


рис. 3

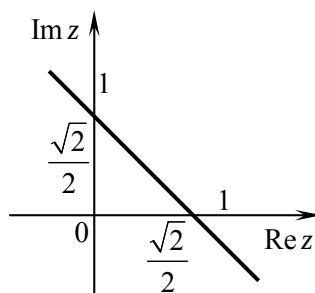


рис. 4

Ответы к варианту 2

Обязательные задачи

1. а) $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right) \cup \{\pi\}$; в) $\frac{1}{4}$; г) если $b \neq 0$ и $b \neq -1$, то 3 корня; если $b = 0$, то 1 корень; если $b = -1$, то 2 корня. 2. а) $\frac{13}{6}$; б) $\{1\}$; в) $\left(\frac{1}{2}; 3 \right)$; г) см. рисунок 5.

Сюжеты на выбор

3А. а) $\{0\}$; б) $\left(\frac{1}{2}; 2 \right]$; в) $(0; 3)$ и $(2; 3)$; г) $b = 1$. 3Б. а) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 3 \ln x + \frac{7}{4}$; б) см. рисунок 6; в) да, является, в точке с абсциссой $x_0 = 2$; г) $6 \ln 2 - \frac{77}{2880}$. 3В. а) см. рисунок 7; б) число b — корень уравнения; в) см. рисунок 8; г) $2\sqrt{2}$.

