

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1995 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 1

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = \log_2(x+2) - \log_2(x-1)$.
- а) Решите неравенство $f(x) > 1$.
 - б) Решите уравнение $f(x) = \log_4(4x^2)$.
 - в) Выясните, какое из чисел ближе к единице — $f(3)$ или $f(5)$.
 - г) Найдите множество значений функции $f(x)$.
2. Дана функция $f(x) = 2\sin^2 x - \sin 2x$.
- а) Вычислите $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
 - б) Решите уравнение $f(x) = 4\cos^2 x$.
 - в) Найдите наименьшее значение функции $f(x)$.
 - г) Найдите все положительные числа a такие, что выполнения неравенства $\left|x - \frac{3\pi}{8}\right| < a$ достаточно для выполнения неравенства $f(x) > 0$.

Сюжеты на выбор
(выбирается один из трех)

- 3А. Рассматриваются комплексные числа z и $z_1 = 2 - z$.
- а) Пусть $z = 10$. Запишите в алгебраической форме все числа a такие, что $a^3 = z_1$.
 - б) Изобразите на чертеже множество всех комплексных чисел z таких, что $(\bar{z} - z_1)(\bar{z} - z) = 0$.
 - в) Пусть $|z| = 1$. Изобразите на чертеже множество всех чисел z_1 .
 - г) Пусть $|z| = 1$. Найдите все числа z такие, что начало координат O и точки, соответствующие числам z , z_1 и $\bar{z}$, лежат на одной окружности.
- 3Б. Дана функция $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$.
- а) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.
 - б) Изобразите на чертеже множество всех точек с координатами $(x; y)$ такими, что $(y - f(x))(y - 2) \leq 0$.
 - в) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямой $y = 2$.
 - г) Случайным образом выбираются числа x и y из отрезка $[-1; 3]$. Выясните, при каких значениях параметра a вероятность того, что выбираются числа, удовлетворяющие условию $(y - f(x))(y - a) \leq 0$, равна 0,5.
- 3В. Дана функция $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 - (2a^2 + a)x + 2a^2$, $a \in \mathbb{R}$.
- а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = 0$.
 - б) Найдите все значения параметра a такие, что многочлен $y = f(x)$ делится без остатка на многочлен $P(x) = x^2 - 3x + 2$.
 - в) Найдите все значения параметра a такие, что касательная к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$ параллельна прямой $y = 1$.
 - г) Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $\frac{f(x)}{x-2} = 0$ имеет ровно два различных вещественных корня.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1995 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = \log_3(8-x) - \log_3(-x)$.
- а) Решите неравенство $f(x) > 1$.
- б) Решите уравнение $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2x+5}\right)$.
- в) Выясните, какое из чисел ближе к единице — $f(-3)$ или $f(-5)$.
- г) Найдите множество значений функции $f(x)$.
2. Дана функция $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x$.
- а) Вычислите $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$.
- б) Решите уравнение $3f(x) + 4 \sin^2 x = 0$.
- в) Найдите наибольшее значение функции $f(x)$.
- г) Найдите все положительные числа a такие, что выполнения неравенства $\left|x + \frac{5\pi}{12}\right| < a$ достаточно для выполнения неравенства $f(x) < 0$.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

- 3А. Рассматриваются комплексные числа z и $z_1 = 2i - z$.
- а) Пусть $z = 10i$. Запишите в алгебраической форме все числа b такие, что $b^3 = z_1$.
- б) Изобразите на чертеже множество всех комплексных чисел z таких, что $(\bar{z} + z_1)(\bar{z} + z) = 0$.
- в) Пусть $|z| = 1$. Изобразите на чертеже множество всех чисел z_1 .
- г) Пусть $|z| = 1$. Найдите все числа z такие, что начало координат O и точки, соответствующие числам z , z_1 и $-\bar{z}$, лежат на одной окружности.
- 3Б. Дана функция $f(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+4}$.
- а) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.
- б) Изобразите на чертеже множество всех точек с координатами $(x; y)$ такими, что $(f(x) - y)(y - 3) \leq 0$.
- в) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямой $y = 3$.
- г) Случайным образом выбираются числа x и y из отрезка $[-4; 5]$. Выясните, при каких значениях параметра a вероятность того, что выбираемые числа удовлетворяют условию $(f(x) - y)(y - a) \geq 0$, равна $\frac{1}{3}$.
- 3В. Дана функция $f(x) = x^3 - (a+2)x^2 - (2a^2 - 2a)x + 4a^2$, $a \in \mathbb{R}$.
- а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = 0$.
- б) Найдите все значения параметра a такие, что многочлен $y = f(x)$ делится без остатка на многочлен $P(x) = x^2 - 3x + 2$.
- в) Найдите все значения параметра a такие, что касательная к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$ параллельна прямой $y = 5$.
- г) Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $\frac{f(x)}{x-1} = 0$ имеет ровно три различных вещественных корня.

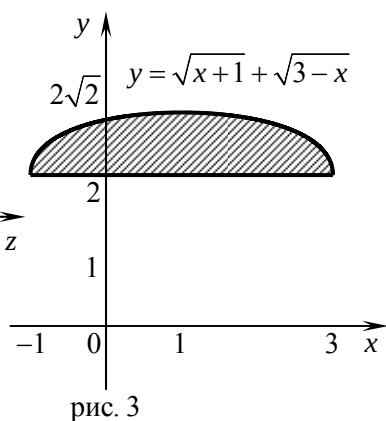
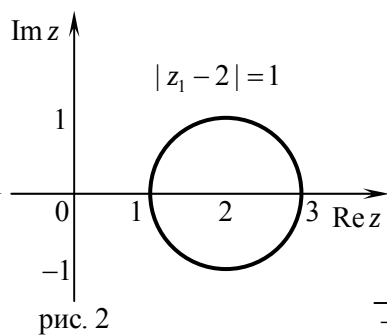
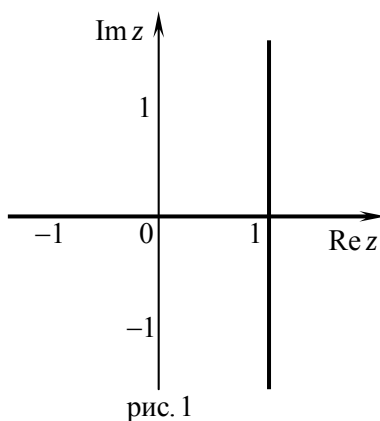
Ответы к варианту 1

Обязательные задачи

1. а) $(1; 4)$; б) $\{2\}$; в) $f(5)$ ближе; г) $(0; +\infty)$. 2. а) 1; б) $\left\{ \arctg 2 + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$;
в) $1 - \sqrt{2}$; г) $\left(0; \frac{\pi}{8} \right]$.

Сюжеты на выбор

- 3А. а) $-2, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}$; б) см. рисунок 1; в) см. рисунок 2; г) $\left\{ 1; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$. 3Б. а) на $[-1; 1]$ функция возрастает; на $[1; 3]$ — убывает; б) см. рисунок 3; в) $\frac{8}{3}$; г) $a = \frac{2}{3}$. 3В. а) $\{-2; 1\}$;
б) $\{-1; 2\}$; в) $\left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\}$; г) $\left\{ -1; -\frac{1}{2}; 0; 1; 2 \right\}$.



Ответы к варианту 2

Обязательные задачи

1. а) $(-4; 0)$; б) $\{-4\}$; в) $f(-5)$ ближе; г) $(0; +\infty)$. 2. а) $1 - \sqrt{3}$;
 б) $\left\{-\arctg \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; в) 3; г) $\left(0; \frac{\pi}{12}\right]$.

Сюжеты на выбор

- 3А. а) $2i$, $-\sqrt{3}-i$, $\sqrt{3}-i$; б) см. рисунок 4; в) см. рисунок 5; г) $\left\{i; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$.
 3Б. а) на $\left[-4; \frac{1}{2}\right]$ функция возрастает; на $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ — убывает; б) см. рисунок 6; в) 9; г) $a = 1$.
 3В. а) $\{-1; 2\}$; б) $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$; в) $\{-2; 1\}$; г) $a \neq -2, a \neq -1, a \neq 0, a \neq \frac{1}{2}$.

