

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1996 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 1

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}$.

а) Решите уравнение $f(x) = 1$.

б) Решите неравенство $f(x) \leq 0$ на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

в) Сравните числа $f\left(\frac{2\pi}{11}\right)$ и 1.

г) Найдите множество значений функции $f(x)$.

2. Дана функция $f(x) = \log_2 x \cdot \log_2(4x)$.

а) Решите неравенства $f(x) < 3$.

б) Решите уравнение $f(x) = |f(4x)|$.

в) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.

г) Выясните, существует ли такое положительное число a , что уравнение $f(x) = f(ax)$ имеет ровно два решения.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

3А. Рассматриваются комплексные числа z и $u = z + \frac{2}{z}$.

а) Запишите в алгебраической форме все числа z такие, что $u = -i$.

б) Изобразите на чертеже совокупность всех чисел z таких, что $\arg z = \frac{\pi}{2}$ и $|u| \leq 1$.

в) Пусть $|z| \leq 1$. Найдите наименьшее значение расстояния между точками комплексной плоскости, соответствующими z и u .

г) Пусть $|z| = 1$. Найдите наибольшее значение площади треугольника с вершинами в точках, соответствующих z и u , и началу координат O .

3Б. Дана функция $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$.

а) Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x)$, параллельных оси абсцисс.

б) Постройте график функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.

в) Докажите, что $\int_{0,5}^2 f(x) dx < \frac{9}{4}$.

г) Найдите наименьшее значение площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = a + 1,5$, для $a > 0$.

3В. Дана функция $f(x) = \sqrt{4x + 1}$.

а) Решите уравнение $(f(x) - 1,5x)(f(x) - 3) = 0$.

б) Изобразите на чертеже множество всех точек с координатами $(x; y)$ такими, что $1,5x \leq y \leq f(x)$.

в) Наудачу выбирается целое число a из отрезка $[-15; 15]$. Определите вероятность того, что уравнение $f(x) = a$ имеет целое решение.

г) Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $f(x) = ax$ имеет решение на отрезке $(0; 2)$.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1996 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x}$.

а) Решите уравнение $f(x) = -1$.

б) Решите неравенство $f(x) \geq 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

в) Сравните числа $f\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ и -1 .

г) Найдите множество значений функции $f(x)$.

2. Дана функция $f(x) = \log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_3 x$.

а) Решите неравенства $f(x) > 6$.

б) Решите уравнение $|f(x)| = f\left(\frac{x}{3}\right)$.

в) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.

г) Выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = f(x \cdot a^{-1})$ в зависимости от a (при $a > 0$).

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

3А. Рассматриваются комплексные числа z и $u = z - \frac{3}{z}$.

а) Запишите в алгебраической форме все числа z такие, что $u = -4i$.

б) Изобразите на чертеже совокупность всех чисел z таких, что $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ и $|u| \leq 4$.

в) Пусть $|z| \geq 1$. Найдите наибольшее значение расстояния между точками комплексной плоскости, соответствующими z и u .

г) Пусть $|z| = 1$. Найдите наибольшее значение площади треугольника с вершинами в точках, соответствующих $-\frac{3}{z}$ и u , и начале координат O .

3Б. Дана функция $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

а) Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x)$, параллельных оси абсцисс.

б) Постройте график функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.

в) Докажите, что $\int_{-0,5}^1 f(x) dx < \frac{15}{4}$.

г) Найдите наименьшее значение площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = a + 1,5$, для $a > -1$.

3В. Дана функция $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$.

а) Решите уравнение $(3 - f(x))(f(x) + 0,75x) = 0$.

б) Изобразите на чертеже множество всех точек с координатами $(x; y)$ такими, что $-0,75x \leq y \leq f(x)$.

в) Наудачу выбирается целое число a из отрезка $[-12; 12]$. Определите вероятность того, что уравнение $f(x) = a$ имеет целое решение.

г) Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $f(x) = ax$ имеет решение на отрезке $[-4; 0]$.

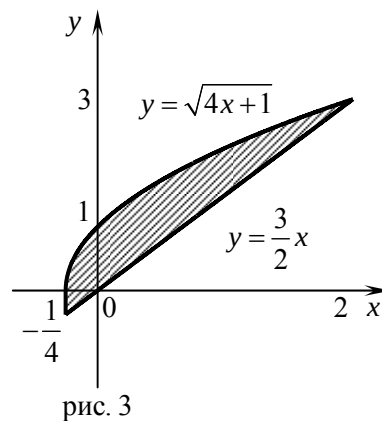
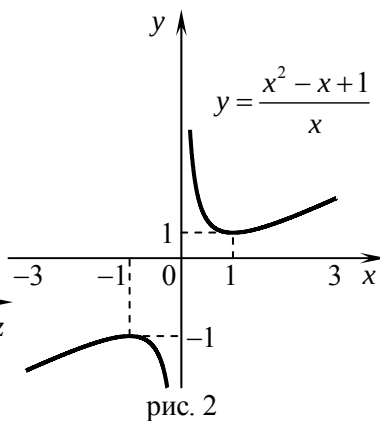
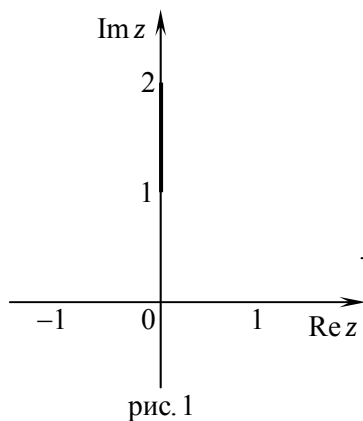
Ответы к варианту 1

Обязательные задачи

1. а) $\left\{ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\left[\pi; \frac{5\pi}{4} \right] \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} \right\}$; в) $f\left(\frac{2\pi}{11}\right) < 1$; г) $\mathbb{R}$. 2. а) $\left(\frac{1}{8}; 2\right)$;
б) $\left\{ \frac{1}{4} \right\}$; в) на $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ функция убывает; на $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ — возрастает; г) не существует.

Сюжеты на выбор

- 3А. а) $i, -2i$; б) см. рисунок 1; в) 2; г) 1. 3Б. а) $y=1, y=-3$; б) см. рисунок 2; г) $\frac{3}{8} + \ln 4$.
3В. а) $\{2\}$; б) см. рисунок 3; в) $\frac{8}{31}$; г) $a > \frac{3}{2}$.



Ответы к варианту 2

Обязательные задачи

1. а) $\left\{ \pi + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left\{ \frac{5\pi}{4} \right\}$; в) $f\left(\frac{2\pi}{7}\right) > -1$; г) $\mathbb{R}$.
2. а) $\left(0; \frac{1}{9} \right) \cup (27; +\infty)$; б) $\{3\}$; в) на $(0; \sqrt{3}]$ функция убывает; на $[\sqrt{3}; +\infty)$ — возрастает; г) при $a = 1$ — бесконечно много решений; при $a \neq 1$ — один корень.

Сюжеты на выбор

- 3А. а) $-i, -3i$; б) см. рисунок 4; в) 3; г) $\frac{3}{2}$. 3Б. а) $y = 2, y = -2$; б) см. рисунок 5; г) $\frac{15}{8} + \ln 4$.
- 3В. а) $\{-4\}$; б) см. рисунок 6; в) $\frac{6}{25}$; г) $a > -\frac{3}{4}$.

