

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1997 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 1

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = 2^x + 2^{2-x}$.
- а) Решите уравнение $f(x) = 5$.
 - б) Решите неравенство $f(x) > 5$.
 - в) Исследуйте функцию $f(x)$ на монотонность.
 - г) Найдите все такие числа a , что числа $f(a+1)$ и $f(a-1)$ равноудалены от числа $f(a)$.
2. Дана функция $f(x) = \sin(x-2a)\cos(x-a)$.
- а) Найдите все значения параметра a такие, что число $x = \frac{\pi}{3}$ является корнем уравнения $f(x) = 0$.
 - б) Пусть $a = \frac{\pi}{6}$. Постройте график функции $f(x)$ на отрезке $[0; \pi]$.
 - в) Пусть $a = \frac{\pi}{6}$. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек с координатами $(x; y)$ такими, что $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ и $f(x) \cdot f(y) \geq 0$.
 - г) Найдите все значения параметра a из отрезка $[0; \pi]$ такие, что уравнение $f(x) = b$ имеет хотя бы одно решение при всяком b из отрезка $[-0,75; 0,25]$.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

3А. Рассматривается множество D комплексных чисел, задаваемое неравенством $|z - \sqrt{3} - i| \leq 1$.

- а) Изобразите на чертеже множество D .
- б) Найдите все корни уравнения $z^2 - \sqrt{3}z + 3 = 0$, принадлежащие множеству D .
- в) Изобразите на чертеже множество M всех чисел u таких, что $u = (1 + i\sqrt{3})z$, где $z \in D$.
- г) Найдите все пары чисел $z \in D$, $v \in M$ таких, что $\left| \frac{\operatorname{Im} v}{\operatorname{Re} v} \right| = \left| \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \right|$.

3Б. Дана функция $f(x) = x + \frac{1}{2x^2}$.

- а) Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0,25; 2]$.
- б) Найдите уравнение касательных к графику функции $f(x)$, проходящих через точку с координатами $(0; 1,5)$.
- в) Найдите площадь фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $y = 1,5$, $y = 2x + 1,5$.
- г) Наудачу выбирается число k из отрезка $[0; 5]$. Определите вероятность того, что уравнение $f(x) = kx + 1,5$ имеет корень из отрезка $[0,25; 0,5]$.

3В. Дана функция $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$.

- а) Решите неравенство $f(x) < 2$.
- б) Решите уравнение $f(x) = 4 - x$.
- в) Найдите множество значений функции $f(x)$.
- г) Найдите все значения параметра a такие, что выполнение неравенства $f(x) < a$ необходимо для выполнения неравенства $|x| > 2$.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1997 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = 3^{x-1} + 3^{1-x}$.
- а) Решите уравнение $f(x) = \frac{10}{3}$.
- б) Решите неравенство $f(x) < \frac{10}{3}$.
- в) Найдите множество значений функции $f(x)$.
- г) Найдите все такие числа b , что числа $f(b+2)$ и $f(b-2)$ равноудалены от числа $f(b)$.
2. Дана функция $f(x) = \sin(x+3a)\sin(x-a)$.
- а) Найдите все значения параметра a такие, что число $x = \frac{\pi}{4}$ является корнем уравнения $f(x) = 0$.
- б) Пусть $a = \frac{\pi}{4}$. Постройте график функции $f(x)$ на отрезке $[0; \pi]$.
- в) Пусть $a = \frac{\pi}{4}$. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек с координатами $(x; y)$ такими, что $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ и $f(x+0,5) \cdot f(y+0,5) < 0$.
- г) Найдите все значения параметра a из отрезка $[0; \pi]$ такие, что уравнение $f(x) = b$ имеет хотя бы одно решение при всяком b из отрезка $[-1; 0]$.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

3А. Рассматривается множество A комплексных чисел z , задаваемое неравенством $|z - 2i| \leq 1$.

- а) Изобразите на чертеже множество A .
- б) Найдите все корни уравнения $z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$, принадлежащие множеству A .
- в) Изобразите на чертеже множество B всех чисел u таких, что $u = (1 + i\sqrt{3})z$, где $z \in A$.
- г) Найдите все пары чисел $z \in A$, $v \in B$ таких, что $\left| \frac{\operatorname{Im} v}{\operatorname{Re} v} \right| = \left| \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \right|$.

3Б. Дана функция $f(x) = x^{-2} - 2x$.

- а) Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-2; -0,75]$.
- б) Найдите уравнение касательных к графику функции $f(x)$, проходящих через точку с координатами $(0; 3)$.
- в) Найдите площадь фигуры, лежащей во второй четверти и ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $y = 3$, $y = -4x + 3$.
- г) Наудачу выбирается число k из отрезка $[-5; -1]$. Определите вероятность того, что уравнение $f(x) = kx + 3$ имеет корень из отрезка $[-0,75; -0,5]$.

3В. Дана функция $f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x-2}}$.

- а) Решите неравенство $f(x) < 0,5$.
- б) Решите уравнение $f(x) = x + 1$.
- в) Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.
- г) Найдите все значения параметра a такие, что выполнение условия $|x| > 6$ достаточно для выполнения неравенства $f(x) > a$.

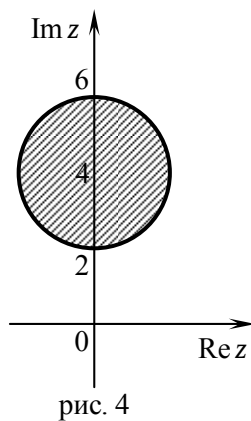
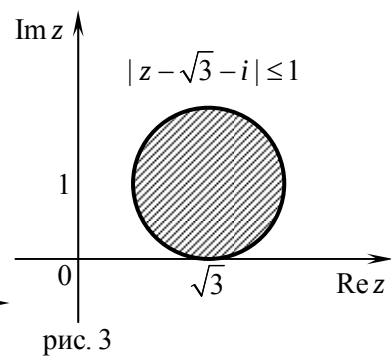
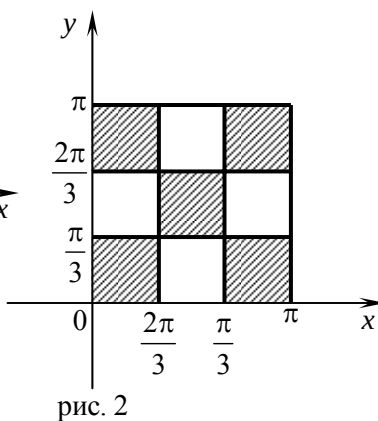
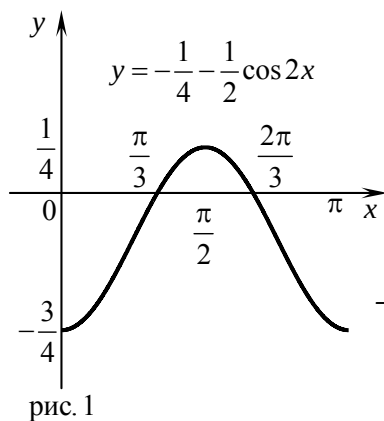
Ответы к варианту 1

Обязательные задачи

1. а) $\{0; 2\}$; б) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; в) на функция $(-\infty; 1]$ убывает; на $[1; +\infty)$ — возрастает;
 г) $a = 1$. 2. а) $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) см. рисунок 1; в) см. рисунок 2; г) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Сюжеты на выбор

- 3А. а) см. рисунок 3; б) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$; в) см. рисунок 4; г) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i; \sqrt{3} + 3i\right)$
 и $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i; -\sqrt{3} + 3i\right)$. 3Б. а) 1,5; б) $y = \frac{3}{2}$, $y = 2x + \frac{3}{2}$; в) $\frac{3}{8}$; г) 0,4. 3В. а) $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$;
 б) $\left\{2; \frac{7 - \sqrt{13}}{2}\right\}$; в) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $a \geq 2$.



Ответы к варианту 2

Обязательные задачи

1. а) $\{0; 2\}$; б) $(0; 2)$; в) $[2; +\infty)$; г) $b = 1$. 2. а) $\left\{-\frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) см. рисунок 5;
в) см. рисунок 6; г) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

Сюжеты на выбор

- 3А. а) см. рисунок 7; б) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$; в) см. рисунок 8; г) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i; -\sqrt{3} + 3i\right)$
и $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i; -\sqrt{3} + 3i\right)$; 3Б. а) 3; б) $y = 3, y = -4x + 3$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{3}{4}$. 3В. а) $(-\infty; 2) \cup [5; 6)$;
б) $\left\{1; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right\}$; в) на $(-\infty; 2)$ и на $[5; +\infty)$ функция возрастает; г) $a \leq \frac{1}{2}$.

