

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1999 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 1

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = \log_3(4x - x^2 + a)$.
 - а) Найдите все такие числа a , что $f(2) = 2$.
 - б) Пусть $a = 5$. Решите неравенство $f(x) \leq \log_{\sqrt{3}} \sqrt{6x + 2}$.
 - в) Пусть $a = 5$. Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.
 - г) Найдите все такие a , что множество значений, принимаемых функцией $f(x)$ при $x \geq 2$ из области ее определения, содержит луч $(-\infty; 2]$.
2. Дана функция $f(x) = \sin x$.
 - а) Решите уравнение $f(2x) = (f(x))^2$.
 - б) Решите неравенство $f(2x) \geq (f(x))^2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.
 - в) Найдите все пары чисел x и y , принадлежащие отрезку $[0; \pi]$, такие, что выполняются условия

$$\begin{cases} \frac{f(2x)}{f(2y)} = \frac{f(x)}{f(y)}, \\ f(2x) = (f(y))^2. \end{cases}$$
 - г) Найдите координаты всех точек графика функции $y = f(2x)$, имеющих абсциссу из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и таких, что на расстоянии $\frac{\pi}{4}$ от них имеется точка графика функции $y = f(x)$ с такой же ординатой.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

- 3А. Рассматриваются комплексные числа z и $u = z - |z|^2$.
 - а) Найдите все числа z такие, что $u = 0$.
 - б) Изобразите на комплексной плоскости совокупность всех чисел z таких, что $\operatorname{Re} u = \operatorname{Im} u$.
 - в) Пусть $|z| = 1$. Изобразите на комплексной плоскости совокупность всех чисел u .
 - г) Пусть случайным образом выбирается число z такое, что $|z| = 1$. Найдите вероятность того, что при этом $|u| \leq 1$.
- 3Б. Дана функция $f(x) = 12 - 48x^{-1} + 36x^{-2}$.
 - а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$.
 - б) Решите неравенство $f(x) > 3x - 9$.
 - в) Постройте множество точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими условиям

$$\begin{cases} 3x - 9 \leq y \leq f(x), \\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$
 - г) Сравните $\int_2^3 f(x) dx$ и $-\frac{3}{2}$.
- 3В. Даны функции $f(x) = \sqrt{x+b}$ и $g(x) = \sqrt{x^2 - 2(b+1)x + 4b}$.
 - а) Пусть $b = -2$. Решите неравенство $f(x) > 4 - x$.
 - б) Найдите все значения параметра b , при которых функция $g(x)$ определена на всей вещественной оси.
 - в) Найдите все значения b , при которых условие $g(x) = 0$ следует из условия $f(x) = 0$.
 - г) Найдите все значения b , при которых уравнение $f(x) \cdot g^{-1}(x) = 0$ не имеет решений.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1999 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = \log_4(6x - x^2 + b)$.
- а) Найдите все такие числа b , что $f(3) = 2$.
- б) Пусть $b = 7$. Решите неравенство $f(x) \geq -\log_{0,25}(8x - 8)$.
- в) Пусть $b = 7$. Найдите промежутки монотонности функции $f(x)$.
- г) Найдите все такие b , что множество значений, принимаемых функцией $f(x)$ при $x \leq 3$ из области ее определения, содержит луч $(-\infty; 2]$.
2. Дана функция $f(x) = \cos x$.
- а) Решите уравнение $f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = (f(x))^2$.
- б) Решите неравенство $f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) > (f(x))^2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.
- в) Найдите все пары чисел x и y , принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, такие, что одновременно выполняются равенства $\frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{f\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)} = \frac{f(x)}{f(y)}$ и $f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = (f(y))^2$.
- г) Найдите координаты всех точек графика функции $y = f(2x)$, имеющих абсциссу из отрезка $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ и таких, что на расстоянии $\frac{\pi}{4}$ от них имеется точка графика функции $y = f(x)$ с такой же ординатой.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

- 3А. Рассматриваются комплексные числа z и $u = |z|^2 + z$.
- а) Найдите все числа z такие, что $u = 0$.
- б) Изобразите на комплексной плоскости совокупность всех чисел z таких, что $\operatorname{Re} u = \operatorname{Im} u$.
- в) Пусть $|z| = 1$. Изобразите на комплексной плоскости совокупность всех чисел u .
- г) Пусть случайным образом выбирается число z такое, что $|z| = 1$. Найдите вероятность того, что при этом $|u| \geq 1$.
- 3Б. Дана функция $f(x) = 4,5x^{-2} + 12x^{-1} + 6$.
- а) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$.
- б) Решите неравенство $f(x) \leq -3x - 4,5$.
- в) Постройте множество точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими условиям $\begin{cases} -3x - 4,5 \leq y \leq f(x), \\ -1 \leq x \leq -0,5. \end{cases}$
- г) Сравните $\int_{-1,5}^{-1} f(x) dx$ и $-\frac{3}{8}$.
- 3В. Даны функции $f(x) = \sqrt{x+1-a}$ и $g(x) = \sqrt{x^2 + 2ax - 2a - 1}$.
- а) Пусть $a = 2$. Решите неравенство $f(x) < 3 - x$.
- б) Найдите все значения a , при которых функция $g(x)$ определена на всей вещественной оси.
- в) Найдите все значения a , при которых условие $g(x) = 0$ следует из условия $f(x) = 0$.
- г) Найдите все значения a , при которых уравнение $f(x) \cdot g(x) = 0$ имеет единственное решение.

Ответы к варианту 1

Обязательные задачи

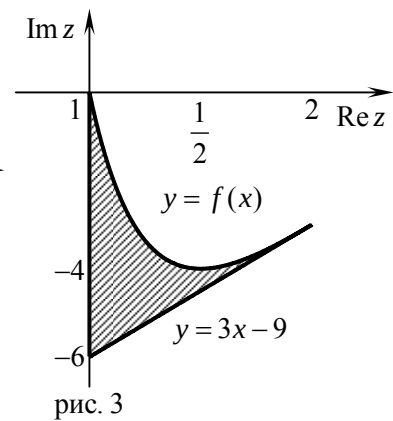
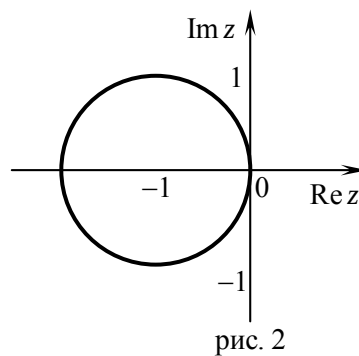
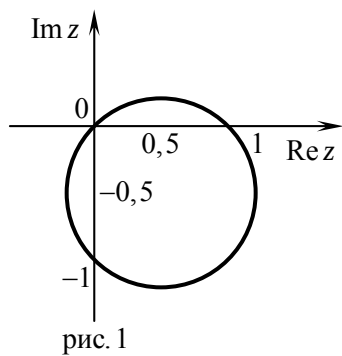
1. а) $a = 5$; б) $[1; 5)$; в) на $[2; 5)$ функция убывает; на $(-1; 2]$ — возрастает; г) $a \geq 5$.

2. а) $\{\arctg 2 + \pi k; \pi k : k \in \mathbb{Z}\}$; б) $(0; \arctg 2)$; в) $\{(\arctg 2; \arctg 2)\}$; г) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}; 1\right); \left(\frac{5\pi}{12}; \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Сюжеты на выбор

3А. а) $\{0; 1\}$; б) см. рисунок 1; в) см. рисунок 2; г) $\frac{1}{3}$. 3Б. а) $y = 3x - 9$;

б) $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 3)$; в) см. рисунок 3; г) $-\frac{3}{2} < \int_2^3 f(x) dx$. 3В. а) $(3; +\infty)$; б) $b = 1$; в) $b = 0$ и $b = -2$; г) $[-2; 0]$.



Ответы к варианту 2

Обязательные задачи

1. а) $b = 7$; б) $(1; 3]$; в) на $(-1; 3]$ функция убывает; на $[3; 7)$ — возрастает; г) $b \geq 7$.

2. а) $\left\{ \arctg \frac{1}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\left(\arctg \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$; в) $\left\{ \left(\arctg \frac{1}{2}; \arctg \frac{1}{2} \right) \right\}$;

г) $\left\{ \left(\frac{3\pi}{4}; 0 \right); \left(\frac{7\pi}{12}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$.

Сюжеты на выбор

3А. а) $\{-1; 0\}$; б) см. рисунок 4; в) см. рисунок 5; г) $\frac{2}{3}$. 3Б. а) $y = -3x - \frac{9}{2}$; б) $\left(-\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup \{-1\}$;

в) см. рисунок 6; г) $\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} f(x) dx > -\frac{3}{8}$. 3В. а) $[1; 2)$; б) $a = -1$; в) $a = 0, a = 2$; г) $a > 0$.

