Задания для классов с углубленным изучением математики, 2000 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 1

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x)=3^{x^2-2x}$.

а) Решите уравнение $f(x)=\frac{1}{3}$.

б) Решите неравенство $f(x)<1$.

в) Сравните числа $f(\log_{0,5}3)$ и $f(\log_{0,25}5)$.

г) Укажите ординаты всех таких точек графика функции $f(x)$, что для каждой из них расстояние от нее до другой точки графика функции $f(x)$ с той же ординатой не меньше 2 и не больше 4.

2. Дана функция $f(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos 2x$.

а) Решите уравнение $f(x)=0$.

б) Вычислите $f\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

в) Решите неравенство $f(x)>\frac{1-\sin x}{4}$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$.

г) Найдите множество значений функции $f(x)$ на отрезке $[0;\pi]$.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

3А. Дано выражение $f(z)=z^2-az-a+4$ и множество M комплексных чисел, удовлетворяющих условию $iz+\overline{z}=0$. Точка K комплексной плоскости, соответствующая комплексному числу z, обозначается $K(z)$.

а) Изобразите на чертеже множество M.

б) Пусть $a=2$. Найдите все корни уравнения $f(z)=0$, принадлежащие множеству M.

в) Изобразите на чертеже множество комплексных чисел $u=iz$, где $z\in M$.

г) Пусть $B(z_0)$, $O(0)$, $A(-2i)$, $C(-2)$. Найдите все вещественные числа a, при которых уравнение $f(z)=0$ имеет такой корень z_0, что в четырехугольник $OABC$ можно вписать окружность.

3Б. Дана функция $f(x)=\sqrt{4x+1}-2x+1$.

а) Решите неравенство $f(x)\ge 0$.

б) Найдите наибольшее значение функции $f(x)$.

в) Постройте множество точек $(x;\,y)$, удовлетворяющих условию $|y-1|\le f(x)$.

г) Наудачу выбирают пару чисел $(x;\,y)$ таких, что $|y-1|\le f(x)$. Определите вероятность того, что $x\ge 0$.

3В. Дан многочлен $P(x)=x^3-3(a+2)x^2+(2a^2+8a+5)x-2a^2-5a$, $a\in\mathbb{R}$.

а) Найдите все значения параметра a такие, что многочлен $P(x)$ делится без остатка на многочлен $Q(x)=x^2-1$.

б) Найдите все значения параметра a такие, что многочлен $P(x)$ имеет три вещественных корня (не обязательно различных), сумма которых равна 9.

в) Найдите все значения параметра a такие, что многочлен $P(x)$ имеет три вещественных корня, образующих арифметическую прогрессию.

г) Случайным образом выбирают число a из множества целых чисел, принадлежащих отрезку $[-6;2]$. Определите вероятность того, что при этом значении a число $x=1$ является корнем многочлена $P(x)$ кратности два.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 2000 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x)=2^{x^2+4x}$.

а) Решите уравнение $f(x)=\dfrac{1}{16}$.

б) Решите неравенство $f(x)\ge 1$.

в) Сравните числа $f(\log_9 7)$ и $f(\log_3 2)$.

г) Укажите ординаты всех таких точек графика функции $f(x)$, что для каждой из них расстояние от нее до другой точки графика функции $f(x)$ с той же ординатой не меньше 4 и не больше 6.

2. Дана функция $f(x)=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\cdot\cos 2x$.

а) Решите уравнение $f(x)=0$.

б) Вычислите $f\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$.

в) Решите неравенство $f(x)<\dfrac{1+\cos 2x}{4}$ на отрезке $\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{4}\right]$.

г) Найдите множество значений функции $f(x)$ на отрезке $[0;\pi]$.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

3А. Дано выражение $f(z)=z^2-2bz+2b+4$ и множество K комплексных чисел, удовлетворяющих условию $iz=\overline{z}$. Точка M комплексной плоскости, соответствующая комплексному числу z, обозначается $M(z)$.

а) Изобразите на чертеже множество K.

б) Пусть $b=-1$. Найдите все корни уравнения $f(z)=0$, принадлежащие множеству K.

в) Изобразите на чертеже множество комплексных чисел $v=\dfrac{z}{i}$, где $z\in K$.

г) Пусть $B(z_0)$, $O(0)$, $A(-2i)$, $C(2)$. Найдите все вещественные числа b, при которых уравнение $f(z)=0$ имеет такой корень z_0, что в четырехугольник $OABC$ можно вписать окружность.

3Б. Дана функция $f(x)=\sqrt{1-2x}+x+1$.

а) Решите неравенство $f(x)\ge 0$.

б) Найдите наибольшее значение функции $f(x)$.

в) Постройте множество точек $(x;\,y)$, удовлетворяющих условию $|y+1|\le f(x)$.

г) Наудачу выбирают пару чисел $(x;\,y)$ таких, что $|y+1|\le f(x)$. Определите вероятность того, что $x\le 0$.

3В. Дан многочлен $P(x)=x^3-2(b+1)x^2+(b^2+4b-1)x-2b^2+2$, $a\in\mathbb{R}$.

а) Найдите все значения параметра b такие, что многочлен $P(x)$ делится без остатка на многочлен $Q(x)=x^2-4$.

б) Найдите все значения параметра b такие, что многочлен $P(x)$ имеет три вещественных корня (не обязательно различных), сумма которых равна 8.

в) Найдите все значения параметра b такие, что многочлен $P(x)$ имеет три вещественных корня, образующих арифметическую прогрессию.

г) Случайным образом выбирают число b из множества целых чисел, принадлежащих отрезку $[-3;\,7]$. Определите вероятность того, что при этом значении b число $x=2$ является корнем многочлена $P(x)$ кратности два.