

Задания для классов с углубленным изучением математики, 2001 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 1

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2(4x)}$.
- а) Решите уравнение $f(x) = \frac{1}{\log_{16} x}$.
- б) Решите неравенство $f(x) < -\frac{1}{6}$.
- в) Найдите наибольшее значение функции $f(x)$ на промежутке $(0, 25; 1)$.
- г) Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $f(x) = \frac{1}{\log_a x}$ имеет решения.
2. Даны функции $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ и $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.
- а) Решите неравенство $f(x) \geq 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.
- б) Решите уравнение $f(x) = g(x)$.
- в) Исследуйте функцию $h(x) = f(x) - g(x)$ на монотонность на промежутке $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.
- г) Пусть A , B и C — точки графика функции $h(x)$ с абсциссами 0 , $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ соответственно. Докажите, что дуги AB и BC графика функции $h(x)$ равны между собой.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

3А. Рассматривается множество M всех комплексных чисел z таких, что $\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$.

Число $\frac{z}{\bar{z}}$ обозначается $u(z)$.

- а) Изобразите на комплексной плоскости множество M .
- б) Изобразите на комплексной плоскости совокупность всех чисел z таких, что $u(z) = i$.
- в) Изобразите на комплексной плоскости совокупность всех чисел $u(z)$, где $z \in M$.
- г) Среди всех $z \in M$ таких, что $|z| = 2$, найдите такие, при которых число $|u(z) - 2i|$ будет наименьшим.

3Б. Дана функция $f(x) = -|x^3 - 3x^2| - 9x$.

- а) Выясните, является ли прямая, задаваемая уравнением $y = -9x$, касательной к графику функции $f(x)$.
- б) Исследуйте функцию $f(x)$ на монотонность.
- в) Постройте множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих условиям $0 \leq x \leq 4$ и $f(x) \leq y \leq -9x$.
- г) Наудачу выбирают пару чисел $(x; y)$ таких, что $0 \leq x \leq 4$, $f(x) \leq y \leq 0$. Определите вероятность того, что $y \leq -9x$.

3В. Даны функции $f(x) = \sqrt{x^2 - (2a+1)x + 2a}$ и $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3a - a^2}$.

- а) Пусть $a = 1$. Решите уравнение $f(x) = 2x - 2$.
- б) Пусть $a = 2$. Решите неравенство $g(x) \leq 2x - 2$.
- в) Наудачу выбирают целое a такое, что $|a| < 10$. Определите вероятность того, что функция $f(x)$ определена при всех целых x .
- г) Найдите все значения a такие, что уравнения $f(x) = 2x - 2$ и $g(x) = 2x - 2$ равносильны.

Задания для классов с углубленным изучением математики, 1993 год

Из трех сюжетов на выбор следует выбрать один. Таким образом, получится 3 сюжета: два обязательных и один выбранный. Для получения оценки «5» достаточно верно и полностью решить любые 10 из 12 полученных таким образом заданий.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. Дана функция $f(x) = \frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_3 \left(\frac{x}{81}\right)}$.

а) Решите уравнение $f(x) = \left(\log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{x}{81}\right)\right)^{-1}$.

б) Решите неравенство $f(x) > \frac{2}{3}$.

в) Найдите наибольшее значение функции $f(x)$ на промежутке $(1; 81)$.

г) Найдите все значения параметра b такие, что уравнение $f(x) = (\log_b x)^{-1}$ имеет решения.

2. Даны функции $f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x$ и $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

а) Решите неравенство $f(x) \leq 0$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

б) Решите уравнение $f(x) = g(x)$.

в) Исследуйте функцию $h(x) = f(x) + g(x)$ на монотонность на промежутке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

г) Пусть K , M и N — точки графика функции $h(x)$ с абсциссами $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ соответственно.

Докажите, что дуги AM и MN графика функции $h(x)$ равны между собой.

Сюжеты на выбор (выбирается один из трех)

3А. Рассматривается множество K всех комплексных чисел z таких, что $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$.

Число $\frac{\bar{z}}{z}$ обозначается $v(z)$.

а) Изобразите на комплексной плоскости множество K .

б) Изобразите на комплексной плоскости совокупность всех чисел z таких, что $v(z) = -i$.

в) Изобразите на комплексной плоскости совокупность всех чисел $v(z)$, где $z \in K$.

г) Среди всех $z \in K$ таких, что $|z| = 3$, найдите такие, при которых число $|v(z) + 3i|$ будет наименьшим.

3Б. Дана функция $f(x) = \left| \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right| - 3x$.

а) Выясните, является ли прямая, задаваемая уравнением $y = -3x$, касательной к графику функции $f(x)$.

б) Исследуйте функцию $f(x)$ на монотонность.

в) Постройте множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих условиям $-4 \leq x \leq 0$ и $-3x \leq y \leq f(x)$.

г) Наудачу выбирают пару чисел $(x; y)$ таких, что $-4 \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq f(x)$. Определите вероятность того, что $y \geq -3x$.

3В. Даны функции $f(x) = \sqrt{x^2 - (3b-1)x - 3b}$ и $g(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 4b - b^2}$.

а) Пусть $b = -1$. Решите уравнение $f(x) = -2x - 2$.

б) Пусть $b = -3$. Решите неравенство $g(x) \leq -2x - 2$.

в) Наудачу выбирают целое b такое, что $|b| < 8$. Определите вероятность того, что функция $f(x)$ определена при всех целых x .

г) Найдите все значения b такие, что уравнения $f(x) = -2x - 2$ и $g(x) = -2x - 2$ равносильны.

Ответы к вариантам

Вариант 1

Обязательные задачи

1. а) $\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$; б) $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$; в) -2 ; г) $(0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$. 2. а) $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$;
б) $\left\{-\frac{\pi}{6} + \pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; в) на $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ функция убывает; на $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ — возрастает;
г.) прямая $x = \frac{\pi}{3}$ — ось симметрии $h(x)$.

Сюжеты на выбор

- 3А. б) прямая $y = x$, $x \neq 0$; в) $\frac{\pi}{3} \leq \arg u \leq \frac{\pi}{2}$, $|u| = 1$; г) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. 3Б. а) да, в точке $(0; 0)$; б) на $[-1; +\infty)$ функция убывает; на $(-\infty; -1]$ — возрастает; г) $\frac{3}{19}$. 3В. а) $\{1\}$;
б) $[2; +\infty) \cup \{1\}$; в) $\frac{2}{19}$; г) $a = 1$, $a = 2$.

Вариант 2

Обязательные задачи

1. а) $\{3\sqrt[3]{3}\}$; б) $(1; 81)$; в) 1 ; г) $(0; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$. 2. а) $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$;
б) $\left\{\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; в) на $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция убывает; на $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$ — возрастает;
г) прямая $x = \frac{\pi}{6}$ — ось симметрии $h(x)$.

Сюжеты на выбор

- 3А. б) прямая $y = x$, $x \neq 0$; в) $-\frac{2\pi}{3} \leq \arg v \leq -\frac{\pi}{2}$, $|v| = 1$; г) $\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
3Б. а) да, в точке $(0; 0)$; б) на $(-\infty; 1]$ функция убывает; на $[1; +\infty)$ — возрастает; г) $\frac{3}{19}$.
3В. а) $\{-1\}$; б) $(-\infty; -3] \cup \{-1\}$; в) $\frac{1}{15}$; г) $b = -3$, $b = -1$.