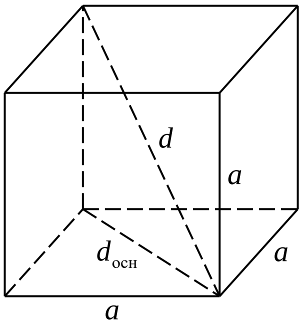
Гущин Д. Д.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ 8: СТЕРЕОМЕТРИЯ

ЭТО НАДО ЗНАТЬ: МНОГОГРАННИКИ

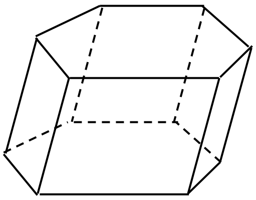
Куб — правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Куб является частный случаем параллелепипеда и призмы, поэтому для него выполнены все их свойства. Кроме того, если a — длина ребра куба, $d_{осн}$ — диагональ основания, d — диагональ куба, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, а V — объем куба, то справедливы формулы:



$$d_{\text{осн}} = a\sqrt{2}, \qquad d = a\sqrt{3},$$

$$S_{\text{полн}} = 6a^2, \qquad V = a^3.$$

Призма. *Призмой* (n-угольной призмой) называется многогранник, две грани которого — равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней — параллелограммы.



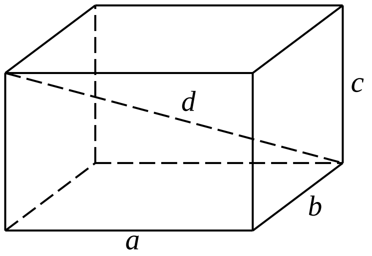
Прямой призмой называется призма, боковое ребро которой перпендикулярно плоскости основания. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру, а все боковые грани прямой призмы — прямоугольники.

Правильной призмой называется прямая призма, основание которой — правильный многоугольник.

Соотношения для прямой призмы. Пусть H — высота прямой призмы, AA_1 — боковое ребро, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем прямой призмы. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} AA_1, \qquad S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}, \qquad V = S_{\text{осн}} H.$$

Прямоугольный параллелепипед. Прямая призма, у которой основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его линейными размерами (измерениями). Помимо свойств призмы, прямоугольных параллелепипед обладает следующими свойствами.



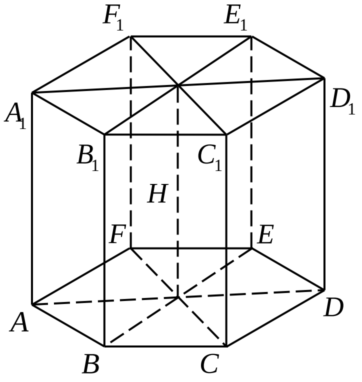
– Противоположные грани прямоугольного параллелепипеда — параллельные и равные прямоугольники.

– Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

– Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

– Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна удвоенной сумме попарных произведений его измерений: $S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac)$.

– Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений $V = abc$.



Особенности правильной шестиугольной призмы. В основании правильной шестиугольной призмы лежит правильный шестиугольник. Напомним его свойства.

– Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной вокруг него окружности.

– Большая диагональ правильного шестиугольника является диметром описанной вокруг него окружности и равна двум его сторонам.

– Меньшая диагональ правильного шестиугольника в $\sqrt{3}$ раз больше его стороны.

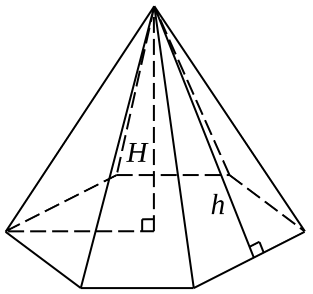
– Угол между сторонами правильного шестиугольника равен 120°.

– Меньшая диагональ правильного шестиугольника перпендикулярна его стороне.

– Треугольник, образованный стороной шестиугольника, его большей и меньшей диагоналями, прямоугольный, а его острые углы равны 30° и 60°.

Пирамида. Пусть вне плоскости многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ задана точка P. Тогда фигура, образованная треугольниками A_1PA_2, A_2PA_3, …, A_nPA_1 и многоугольником $A_1A_2\dots A_n$ вместе с их внутренними областями называется *пирамидой* (*n-угольной пирамидой*).

Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник, а основание ее высоты — центр этого многоугольника.



Соотношения для правильной пирамиды. Пусть H — высота правильной пирамиды, h — ее апофема, $P_{\text{осн}}$ — периметр основания пирамиды, $S_{\text{осн}}$ — площадь основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем правильной пирамиды. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн}}h, \qquad S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}, \qquad V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H.$$

ЭТО НАДО ЗНАТЬ: СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Секущей плоскостью многогранника называется любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника. Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, *называется сечением* многогранника.

Тетраэдр имеет четыре грани, поэтому его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис. 1). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники (рис. 2).

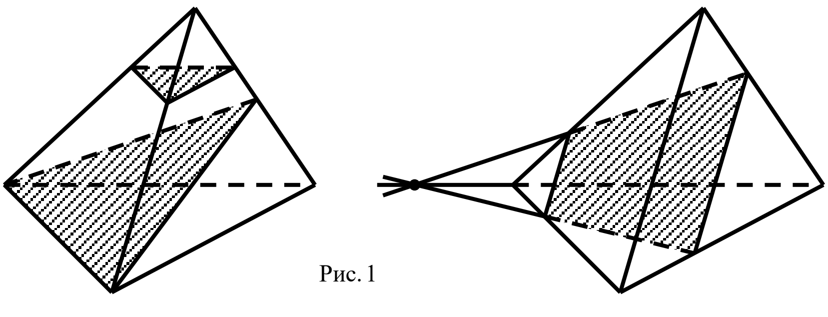


Рис. 1

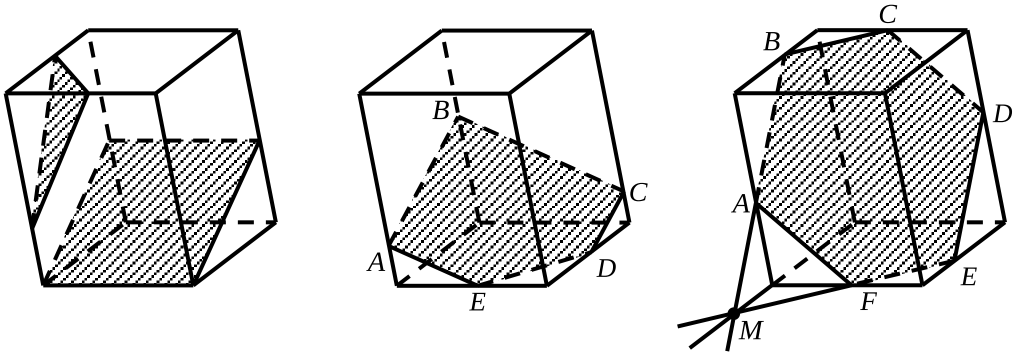
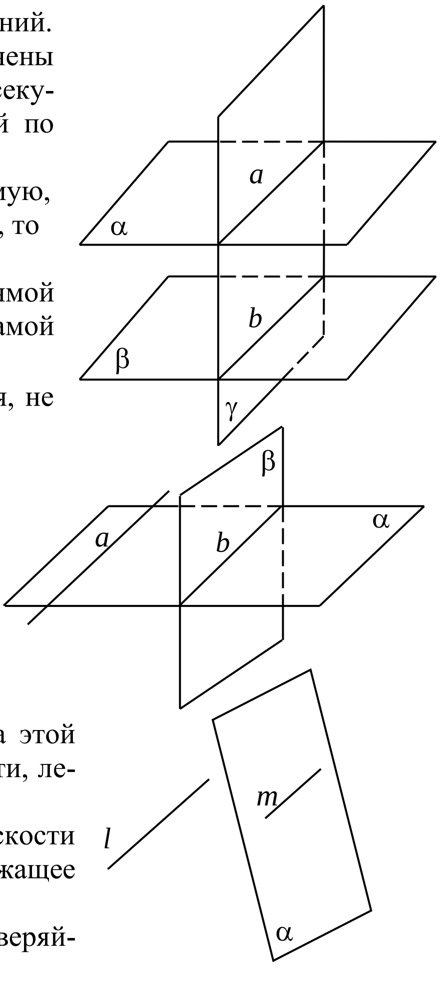


Рис. 2



Напомним теоремы, используемые при построении сечений.

Теорема 1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны. Поэтому секущая плоскость пересекает плоскости параллельных граней по параллельным прямым.

Теорема 2. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Теорема 3. Если прямая l параллельна какой либо прямой m, проведённой в плоскости α, то она параллельна и самой плоскости α.

Теорема 4. Если прямая, лежащая в плоскости сечения, не параллельна плоскости некоторой грани, то она пересекается со своей проекцией на эту грань.

Для построения сечений рекомендуем пользоваться следующим алгоритмом.

1. Если две точки секущей плоскости лежат в плоскости одной грани, то проводим через них прямую. Часть прямой, лежащая в плоскости грани — сторона сечения.
2. Если прямая a является общей прямой секущей плоскости и плоскости какой-либо грани, то находим точки пересечения прямой a с прямыми, содержащими ребра этой грани. Полученные точки — новые точки секущей плоскости, лежащие в плоскостях граней.
3. Если никакие две из данных точек не лежат в плоскости одной грани, то строим вспомогательное сечение, содержащее любые две данные точки, а затем выполняем шаги 1, 2.

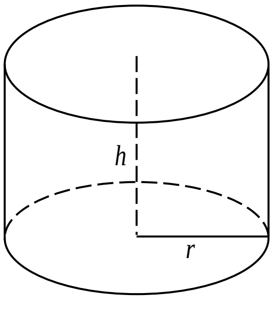
Для контроля правильности построенного сечения, проверяйте, что:

– все вершины сечения лежат на рёбрах многогранника;

– все стороны сечения лежат в гранях многогранника;

– в каждой грани многогранника лежит не более одной стороны сечения.

ЭТО НАДО ЗНАТЬ: КРУГЛЫЕ ТЕЛА

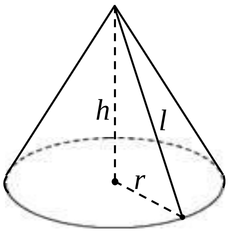


Цилиндр. *Цилиндром* называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.

Соотношения для цилиндра. Пусть h — высота цилиндра, r — радиус основания, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем цилиндра. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh, \qquad S_{\text{полн}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh, \qquad V = S_{\text{осн}}h = \pi r^2 h.$$

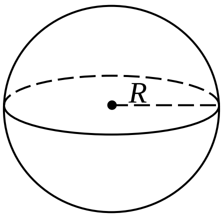
Конус. *Конусом* называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.



Соотношения для конуса. Пусть h — высота конуса, r — радиус основания, l — образующая, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности, V — объем конуса. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$h^2 + r^2 = l^2, \qquad S_{\text{бок}} = \pi r l, \qquad S_{\text{полн}} = \pi r^2 + \pi r l, \qquad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Сфера и шар. *Шаром* называется фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр. *Сферой* называется поверхность шара. Пусть R — радиус шара, S — площадь сферы, V — объем шара. Тогда имеют место следующие соотношения:



$$S = 4\pi R^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ЭТО НАДО ЗНАТЬ: КОМБИНАЦИИ КРУГЛЫХ ТЕЛ

Вписанные сферы

Сфера называется *вписанной в цилиндр*, если она касается обоих оснований цилиндра и каждой его образующей.

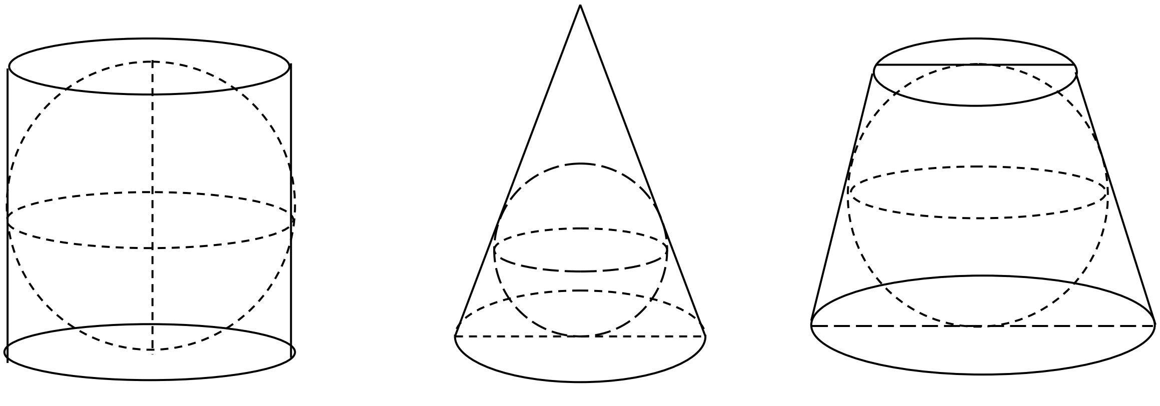
Сфера называется *вписанной в конус*, если она касается основания конуса и каждой его образующей.

Сфера называется *вписанной в усечённый конус*, если она касается обоих оснований конуса и всех его образующих.

Теорема 1. В прямой круговой цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его высота равна диаметру основания. Причём центр сферы есть середина оси цилиндра.

Теорема 2: в любой прямой круговой конус можно вписать сферу. Причём центр сферы есть точка пересечения оси конуса с биссектрисой угла наклона образующей конуса к плоскости его основания.

Теорема 3. в усечённый конус можно вписать сферу тогда и только тогда, когда он прямой круговой, и длина его образующей равна сумме длин радиусов оснований. Причём центр сферы есть середина оси усечённого конуса.



Описанные сферы

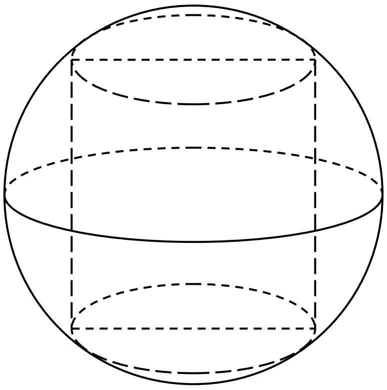
Сфера называется *описанной около цилиндра*, если окружности его оснований лежат на сфере.

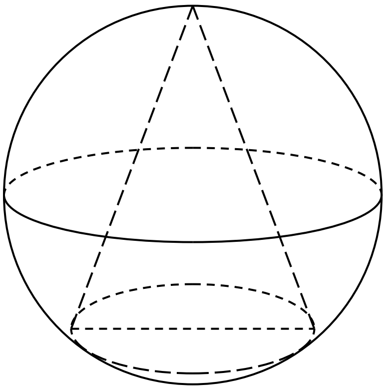
Сфера называется *описанной около конуса*, если вершина конуса и его основание лежат на сфере.

Теорема 1: около цилиндра можно описать сферу тогда и только тогда, когда он прямой круговой. Причём центр сферы есть середина оси цилиндра.

Теорема 2: около конуса можно описать сферу тогда и только тогда, когда он круговой. Причём центр сферы есть точка пересечения прямой, перпендикулярной к плоскости основания и проходящей через центр его, и плоскости, перпендикулярной какой-либо его образующей конуса и проходящей середину этой образующей.

Следствие: сферу можно описать около любого прямого кругового конуса. В этом случае, центр сферы — точка пересечения прямой, содержащей высоту конуса с плоскостью, перпендикулярной какой-либо из его образующих и проходящей через ее середину.





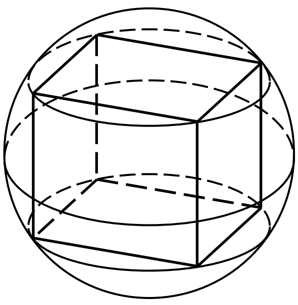
Комбинации конуса и цилиндра

Цилиндр называется *вписанным в конус*, если одно его основание лежит на основании конуса, а второе совпадает с сечением конуса плоскостью, параллельной основанию. Конус в этом случае называется *описанным вокруг цилиндра*.

Цилиндр называется *описанным вокруг конуса*, если центр одного из оснований цилиндра является вершиной вершина конуса, а противоположное основание цилиндра совпадает с основанием конуса. Конус в этом случае называется *вписанным в цилиндр*.

ЭТО НАДО ЗНАТЬ: КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И КРУГЛЫХ ТЕЛ

Описанные сферы



Сфера называется *описанной* около многогранника, если все его вершины лежат на этой сфере. Многогранник называется в этом случае вписанным в сферу.

Возможность описать сферу около многогранника означает существование точки (центра сферы), равноудалённой ото всех вершин многогранника.

Теорема 1: если из центра описанной около многогранника сферы опустить перпендикуляр на какое-либо из его рёбер, то основание этого перпендикуляра разделит ребро на две равные части.

Теорема 2: если из центра описанной около многогранника сферы опустить перпендикуляр на какую-либо из его граней, то основание этого перпендикуляра попадёт в центр круга, описанного около соответствующей грани.

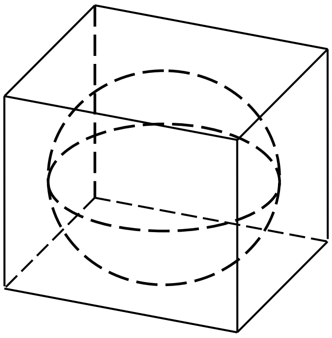
Теорема 3: если около многогранника описана сфера, то её центр лежит на пересечении перпендикуляров к каждой грани пирамиды, проведённых через центр окружности, описанной около соответствующей грани.

Теорема 4: если около многогранника описана сфера, то её центр является точкой пересечений всех плоскостей, проведённых через середины рёбер пирамиды перпендикулярно к этим рёбрам.

Вписанные сферы

Сфера называется *вписанной* в многогранник, если все его грани касаются этой сферы. Многогранник называется в этом случае описанным около сферы.

Теорема: если в многогранник с площадью поверхности S и объёмом V вписан шар радиуса r, то справедливо соотношение: $r = \frac{3V}{S}$.

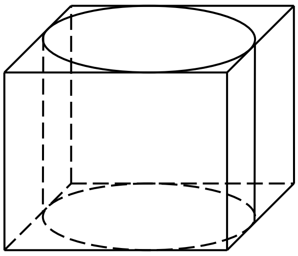


Комбинации конуса, цилиндра и многогранников

В условиях задач встречаются также следующие понятия, не входящие в школьные учебники, которые уточняются непосредственно в условиях задач. Приведем наиболее употребительные из них.

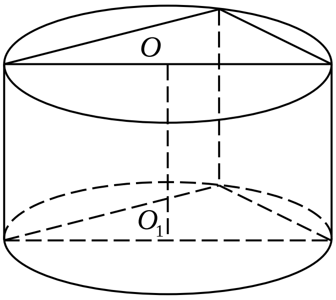
Цилиндр *вписан в призму*: основания цилиндра вписаны в основания призмы.

Цилиндр *описан вокруг призмы*: основания цилиндра описаны вокруг оснований призмы.



Цилиндр *вписан в пирамиду*: одно из основание циindra вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, а другое основание цилиндра принадлежит основанию пирамиды.

Цилиндр *описан вокруг пирамиды*: вершина пирамиды принадлежит одному из оснований цилиндра, а другое его основание описано вокруг основания пирамиды.



Конус *вписан в призму*: основание конуса вписано в основание призмы, а вершина конуса принадлежит противоположному основанию призмы.

Конус *описан вокруг призмы*: одно из оснований призмы вписано в сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, а другое основание призмы принадлежит основанию конуса.

Конус *вписан в пирамиду*: их вершины совпадают, а основание конуса вписано в основание пирамиды. Вписать конус в пирамиду можно только тогда, когда апофемы пирамиды равны между собой.

Конус *описан вокруг пирамиды*: их вершины совпадают, а основание конуса описано вокруг основания пирамиды.

ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Задания этого вида представляют собой стереометрические задания на установление взаимосвязи между основными элементами многогранников и круглых тел, а также на использование формул для вычисления их площадей поверхностей и объемов. Вычислительной трудности задания не представляют; решение, как правило, сводится к использованию одной-двух формул. Соответствующие формулы нужно знать наизусть.