

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ 9: ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Сложение и вычитание дробей. Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить без изменений. Чтобы вычесть две дроби с одинаковыми знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить без изменений. Чтобы сложить или вычесть две дроби с разными знаменателями, необходимо сначала привести дроби к общему знаменателю.

Умножение дробей. Чтобы умножить две дроби, надо перемножить их числители, перемножить их знаменатели, и разделить первое произведение на второе.

Деление дробей. Чтобы разделить дробь на дробь, надо умножить первую дробь на дробь, обратную второй.

Возведение дроби в степень. Чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель, и разделить степень числителя на степень знаменателя.

Формулы сокращенного умножения:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), & (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, & (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2), & a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Степень. Пусть дано положительное число a и произвольное действительное число n . Число a^n называется *степенью*, число a — *основанием степени*, число n — *показателем степени*.

Напомним, что по определению полагают:

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Степень с дробным показателем. Если a — положительное число, m — целое число, а n — натуральное число и $n \geq 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

В частности, например,

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} = (\sqrt[4]{a})^3.$$

Свойства степеней. Если a и b — положительные числа, x и y — любые действительные числа, то справедливы следующие свойства:

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y}, & a^x : a^y &= a^{x-y}, \\ (a^x)^y &= a^{xy}, & a^x \cdot b^x &= (a \cdot b)^x, & \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x. \end{aligned}$$

Арифметический корень. Пусть n — натуральное число, отличное от единицы, a — неотрицательное число. *Арифметическим корнем n -й степени* из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a .

Для арифметического корня n -й степени из неотрицательного числа a используется обозначение $\sqrt[n]{a}$. Если $n = 2$, пишут $\sqrt{a}$. По определению $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Для любых, в том числе отрицательных, значений a справедлива формула $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, в частности,

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{и} \quad \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|.$$

Свойства арифметического корня. Если a и b — неотрицательные числа, n и k — натуральные числа, отличные от единицы, m — целое число, то имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^m} &= (\sqrt[n]{a})^m, & \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0, \\ \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[kn]{a}, & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} &= \sqrt[nk]{a^{k+n}}, & \sqrt[n]{a} : \sqrt[k]{a} &= \sqrt[nk]{a^{k-n}}. \end{aligned}$$

Степень с дробным показателем. Если a — положительное число, m — целое число, а n — натуральное число и $n \geq 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Определение логарифма. Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b . Для логарифма положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) используется обозначение $\log_a b$.

По определению

$$a^{\log_a b} = b,$$

это равенство называется *основным логарифмическим тождеством*.

Частные случаи:

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a a^n = n.$$

Логарифм положительного числа b по основанию 10 называется десятичным логарифмом и обозначается $\lg b$.

Логарифм положительного числа b по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln b$.

Свойства логарифмов. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $m \neq 0$, n — любое действительное число, то справедливы следующие свойства:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy), \quad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$$

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x, \quad \log_{a^m} a^n = \frac{n}{m},$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \log_a c = \frac{1}{\log_c a},$$

$$\log_a x \cdot \log_c y = \log_a y \cdot \log_c x.$$

Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Правило для запоминания формул приведения. Чтобы записать формулу приведения для аргументов $0,5\pi \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $1,5\pi \pm \alpha$ необходимо: 1) определить *четверть*, в которой лежит аргумент приводимой функции, предполагая α острым углом; 2) определить *знак* приводимой функции в этой четверти; 3) определить *вид функции*, не меняя ее названия для аргументов $\pi \pm \alpha$, и изменяя функцию на сходственную для аргументов $0,5\pi \pm \alpha$, $1,5\pi \pm \alpha$. А именно:

$$\begin{array}{lll} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha, & \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, & \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \\ \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha, & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, & \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, & \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha. \end{array}$$

Свойства четности и нечетности функций

$$\begin{array}{ll} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha & \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \end{array}$$

Табличные значения тригонометрических функций

$\sin 0 = 0$	$\cos 0 = 1$	$\operatorname{tg} 0 = 0$	$\operatorname{ctg} 0$ не существует
$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$
$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$	$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$
$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не существует	$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$

ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Задания на действия с числовыми и алгебраическими дробями вполне привычны из курса математики 5—6 классов и алгебры 7 класса. Напомним только, что при выполнении действий с числовыми дробями разных типов, а также при извлечении корня обычно бывает удобно переводить десятичные дроби в обыкновенные, а смешанные — в неправильные.

При решении многих задач ЕГЭ необходимо установить связь между различными основаниями степени, поэтому будет полезно знать некоторые степени чисел в пределах 1000:

$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$
$2^7 = 128$	$2^8 = 256$,	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$	
$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$	$3^6 = 729$
$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1024$	
$5^2 = 25$	$5^3 = 125$	$5^4 = 625$		
$6^2 = 36$	$6^3 = 216$	$7^2 = 49$	$7^3 = 343$	
$8^2 = 64$	$8^3 = 512$	$9^2 = 81$	$9^3 = 729$	

Большая часть заданий экзаменационных заданий на преобразования логарифмических выражений представляет собой задачи на вычисление логарифмов; задания на преобразования буквенных логарифмических выражений представлены всего тремя прототипами. При подготовке следует обратить особое внимание на формулу перехода к новому основанию логарифма и следствия из нее: задачи на использование этих формул в школьных учебниках практически не встречаются.

Большая часть заданий по тригонометрии представляет собой задачи на вычисление значений числовых тригонометрических выражений с применением формул двойных углов и формул приведения. При этом наиболее часто используются следующие следствия из формул приведения: если $\alpha + \beta = 90^\circ$, то $\sin \alpha = \cos \beta$, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$, а если $\alpha + \beta = 180^\circ$, то синусы углов α и β равны, а их косинусы, тангенсы и котангенсы противоположны.