*Гущин Д. Д.*

# СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

## ЗАДАНИЯ 11: ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

### ЭТО НАДО ЗНАТЬ

**Движение по прямой.** Пусть скорости двух тел, начинающих движение одновременно, суть $v_1$ и $v_2$, расстояние между ними *S*. Тогда:

– при движении навстречу друг другу они встретятся через время $\dfrac{S}{v_1+v_2}$;

– при движении в одну сторону и при $v_1 > v_2$, первое тело догонит второе через время $\dfrac{S}{v_1-v_2}$;

– при движении в противоположные стороны тела через время *t* будут находиться друг от друга на расстоянии $S+(v_1+v_2)t$.

– Если тело движется по течению реки, то его скорость относительно берега $w$ есть сумма скорости тела в стоячей воде $v$ и скорости течения реки $u$: $w=u+v$, при движении против течения $w=u-v$.

– Если тело движется против течения реки, то его скорость относительно берега $w$ есть разность скорости тела в стоячей воде $v$ и скорости течения реки $u$: $w=v-u$.

Для извлечения корня из дискриминантов полезна таблица квадратов:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $11^2=121$ | $12^2=144$ | $13^2=169$ | $14^2=196$ | $15^2=225$ |
| $16^2=256$ | $17^2=289$ | $18^2=324$ | $19^2=361$ | $20^2=400$ |
| $21^2=441$ | $22^2=484$ | $23^2=529$ | $24^2=576$ | $25^2=625$ |
| $26^2=676$ | $27^2=729$ | $28^2=784$ | $29^2=841$ | $30^2=900$ |

Большинство экзаменационных задач на движение могут быть решены при помощи следующего алгоритма:

– обозначаем неизвестную величину буквой *x*, выясняем область ее определения;
– составляем таблицу со столбцами «Скорость», «Время», «Расстояние»;
– заполняем два столбца таблицы, вписывая в них *x* и данные задачи;
– заполняем оставшийся «ключевой» столбец по формулам $S=vt,\ v=\dfrac{S}{t},\ t=\dfrac{S}{v}$;
– составляем уравнение на данные ключевого столбца таблицы;
– решаем полученное уравнение на области определения *x*, и находим неизвестную.

**Движение по окружности.** Пусть скорости двух тел, начинающих движение одновременно, суть $v_1$ и $v_2$, тогда:

– при движении в одном направлении по замкнутой траектории длины *S* при условии $v_1 > v_2$ тела, отправившиеся из одной точки, снова встретятся через время $\dfrac{S}{v_1-v_2}$;

– при встречном движении по замкнутой траектории длины $S$ тела, отправившиеся из одной точки, снова встретятся через время $\dfrac{S}{v_1+v_2}$.

## ОСОБЕННОСТИ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ

Абсолютное большинство задач решается составлением рационального уравнения, сводимого к квадратному. Некоторые задания допускают не только алгебраическое решение, связанное с составлением уравнения, но и арифметическое, без использования переменных. При подготовке к экзаменам полезно решать задачи обоими возможными способами. Приведем пример.

**Задание.** Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

**Алгебраическое решение.** Пусть неизвестная скорость второго автомобиля равна $x$ км/ч. По условию, первый автомобиль догонит второй через 40 минут, что составляет 2/3 часа. Тогда имеем:

$$\frac{14}{80-x}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 42=160-2x\Leftrightarrow x=59 \text{ км/ч.}$$

**Арифметическое решение.** Первый автомобиль обгонит второй на полный круг за 40 минут, значит, он за 2/3 часа он проходит на 14 км больше. Следовательно, скорость сближения автомобилей равна 14: (2/3) = 21 км/ч. Поэтому скорость второго автомобиля на 21 км в час меньше скорости первого автомобиля. Тем самым, она равна 80 – 21 = 59 км/ч.

Ответ: 59.

## ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Большинство экзаменационных задач на совместную работу могут быть решены при помощи следующего алгоритма:

– обозначаем неизвестную величину буквой $x$, выясняем область ее определения;

– составляем таблицу со столбцами «Производительность», «Время», «Объем работы»;

– заполняем два столбца таблицы, вписывая в них $x$ и данные задачи; если объем работы не задан принимаем его за 1;

– заполняем оставшийся «ключевой» столбец по формулам $V=vt,$ или $v=\frac{V}{t},$ или $t=\frac{V}{v}$, связывающим объем работы $V$, производительность $v$ и время $t$.

– составляем уравнение на данные ключевого столбца таблицы;

– решаем полученное уравнение на области определения $x$, и находим неизвестную.

**Задание.** Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

**Алгебраическое решение.** Пусть первый рабочий, работая отдельно, выполнит всю работу за $x$ дней, $x>0$. Работая вместе, рабочие выполняют всю работу за 12 дней, поэтому за один день они выполняют $\frac{1}{12}$ всей работы. Отсюда имеем:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{5}{3x}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow 60=3x\Leftrightarrow x=20.$$

Таким образом, работая один, первый рабочий выполнит всю работу за 20 дней.

**Арифметическое решение.** Производительности рабочих относятся как 3:2, значит, на долю первого рабочего приходится 0,6 работы. Поэтому в день он выполняет $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{20}$ работы, а всю работу выполнит за 20 дней.

## ЭТО НАДО ЗНАТЬ

*Процент* от числа — это сотая доля этого числа. Задача найти $p\%$ от $a$, эквивалентна задаче вычислить произведение $p\cdot\frac{a}{100}$ или $0,01pa.$ Например, вычисляя 6% от 150, получаем: $0,06\cdot 150=6\cdot 1,5=9.$ Справедливы следующие утверждения.

– Если некоторое число $a$ увеличить на $p\%,$ то получим $a(1+0,01p)$.

– Если некоторое число $a$ уменьшить на $p\%,$ то получим $a(1-0,01p)$.

– Если некоторое число $a$ увеличить на $p_1\%,$ а полученный результат уменьшить на $p_2\%,$ то оно получим $a(1+0,01p_1)(1-0,01p_2).$

– Положенная в банк под $p\%$ годовых начальная сумма $S_0$ через $n$ лет с учетом процентов достигнет величины $S_n=S_0(1+0,01p)^n.$

**Правило креста.** Если смешивать некоторое массу $a$-процентного раствора некоторого вещества с некоторой массой $b$-процентного раствора этого же вещества, $b>a,$ то чтобы получить $x$-процентную смесь, то исходные вещества надо брать в соотношении $b-x$ к $x-a$ (см. табл.):

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | | $b-x$ |
| | $x$ | |
| $b$ | | $x-a$ |