

Вычисление расстояний и углов

Ю. Ионин, В. Некрасов

В этой статье рассматривается несколько геометрических задач, для решения которых необходимо вычислить те или иные расстояния или углы в пространстве (эти задачи предлагались на вступительных экзаменах в разные вузы). Задачи такого типа удобно решать с помощью скалярного произведения векторов. Основной метод решения заключается в том, что в пространстве выбирается подходящий базис и составляется таблица умножения — таблица скалярных произведений векторов этого базиса. Имея такую таблицу и зная разложение векторов в выбранном базисе, вычислить длины этих векторов и углы между ними уже легко. Мы начнем с простой задачи, где этот метод напрашивается сам собой, а затем перейдем к более сложным задачам, продемонстрировав на них все основные случаи.

Задача 1. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра имеют одинаковую длину. Точка M — середина ребра AD , точка O — центр треугольника ABC , точка N — середина ребра AB и точка K — середина ребра CD . Найдите угол между прямыми MO и KN .

Решение. Примем длину ребра тетраэдра за единицу и выберем в качестве базиса векторы $\vec{DA} = \vec{a}$, $\vec{DB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{c}$. Составим таблицу умножения для этого базиса (табл. 1). Разложим векторы $\vec{MO}$ и $\vec{KN}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

Таблица 1

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\vec{b}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\vec{c}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$\vec{MO} = \vec{DO} - \vec{DM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{6}(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}),$$

$$\vec{KN} = \vec{DN} - \vec{DK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}).$$

Угол φ между прямыми MO и KN вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{MO} \cdot \vec{KN}|}{|\vec{MO}| \cdot |\vec{KN}|}.$$

Найдем $\vec{MO} \cdot \vec{KN}$, $|\vec{MO}|$ и $|\vec{KN}|$, пользуясь таблицей 1:

$$\vec{MO} \cdot \vec{KN} = \frac{1}{12}(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{12};$$

$$|\vec{MO}| = \frac{1}{6}\sqrt{(-\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})^2} = \frac{1}{2}; \quad |\vec{KN}| = \frac{1}{2}\sqrt{(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Однако условие задачи не всегда позволяет выбрать базис с полностью определенной таблицей умножения. В этом случае нужно попытаться составить уравнение относительно недостающего элемента.

Задача 2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a , точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5a}{6}$. Определите высоту призмы.

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\vec{AA}_1 = \vec{m}$, $\vec{AB} = \vec{n}$, $\vec{AC} = \vec{p}$ (рис. 1). Пусть $h = |\vec{m}|$. Таблица 2 — это таблица умножения для базиса $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})$.

Ортогональная проекция отрезка AO_1 на прямую B_1O равна длине этого отрезка, умноженной на косинус угла φ между прямыми AO_1 и B_1O . Чтобы вычислить $|\vec{AO}_1|$ и $\cos \varphi$, разложим векторы $\vec{AO}_1$ и $\vec{B_1O}$ в базисе $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})$:

$$\vec{AO}_1 = \frac{1}{3}(\vec{AA}_1 + \vec{AB}_1 + \vec{AC}_1) = \frac{1}{3}(\vec{m} + \vec{m} + \vec{n} + \vec{m} + \vec{p}) = \frac{1}{3}(3\vec{m} + \vec{n} + \vec{p});$$

$$\vec{B_1O} = \vec{AO} - \vec{AB_1} = \frac{1}{3}(\vec{n} + \vec{p}) - (\vec{m} + \vec{n}) = \frac{1}{3}(-3\vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}).$$

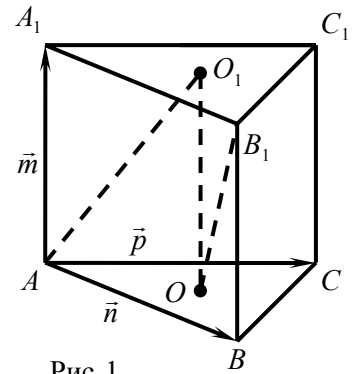


Рис. 1

Таблица 2

	$\vec{m}$	$\vec{n}$	$\vec{p}$
$\vec{m}$	h^2	0	0
$\vec{n}$	0	a^2	$\frac{a^2}{2}$
$\vec{p}$	0	$\frac{a^2}{2}$	a^2

Используя таблицу 2, находим:

$$|\vec{AO}_1| = |\vec{B_1O}| = \frac{1}{3}\sqrt{9h^2 + 3a^2}, \quad \vec{AO}_1 \cdot \vec{B_1O} = -\frac{1}{6}(6h^2 + a^2),$$

$$\cos \varphi = \frac{6h^2 + a^2}{2(3h^2 + a^2)}.$$

Поскольку $|\vec{AO}_1| \cdot \cos \varphi = \frac{5a}{6}$, мы получаем уравнение

$$\frac{(6h^2 + a^2)\sqrt{9h^2 + 3a^2}}{6(3h^2 + a^2)} = \frac{5a}{6}.$$

Отсюда $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Можно выделить четыре основных типа задач на вычисление расстояний и углов.

1. Расстояние от точки до прямой.

Дано: точка M ; прямая l с направляющим вектором $\vec{a}$,

точка A , принадлежащая прямой l ; $\vec{AM} = \vec{m}$.

Найти: расстояние от точки M до прямой l .

(Векторы $\vec{a}$ и $\vec{m}$ в условии задачи даны в том смысле, что известны их разложения в некотором базисе с заданной таблицей умножения.)

Приведем схему решения этой задачи.

Пусть N — ортогональная проекция точки M на прямую l (рис. 2). Тогда $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = x\vec{a} - \vec{m}$. Неизвестный коэффициент x находится из условия перпендикулярности векторов $\vec{MN}$ и $\vec{a}$: $(x\vec{a} - \vec{m}) \cdot \vec{a} = 0$. Искомое расстояние:

$$|\vec{MN}| = \sqrt{(x\vec{a} - \vec{m})^2}.$$

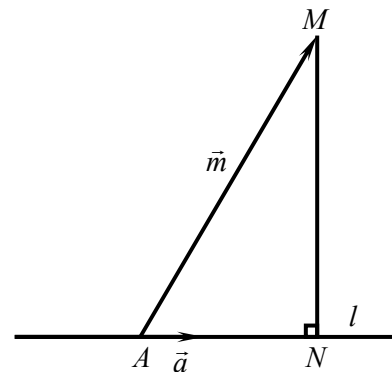


Рис. 2

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $SA = 4$) точка D лежит на ребре SC , $CD = 3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найдите объем пирамиды.

Решение. Выберем базис из векторов $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$, $\vec{SD} = \vec{c}$. Составим таблицу умножения для этого базиса, обозначив через φ плоский угол при вершине пирамиды (табл. 3). По условию расстояние от точки A до BD прямой равно 2. Вычислив это расстояние с помощью таблицы 3, мы получим уравнение, позволяющее найти $\cos \varphi$.

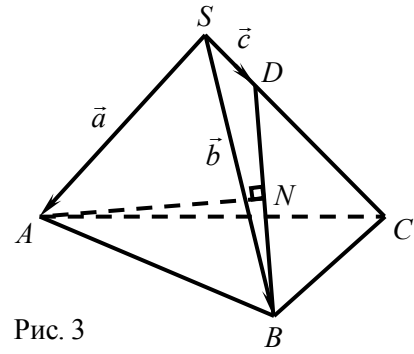


Рис. 3

Пусть N — проекция точки A на прямую BD (рис. 3). Тогда

$$\begin{aligned}\vec{AN} &= \vec{DN} - \vec{DA} = x\vec{DB} - \vec{DA} = x(\vec{b} - \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{c}) = \\ &= -\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c}.\end{aligned}$$

Так как векторы $\vec{AN}$ и $\vec{DB}$ перпендикулярны, получаем $(-\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$. Используя таблицу 3, после упрощения находим:

$$(17x - 1) - 8(x + 1)\cos \varphi = 0. \quad (1)$$

Вычислим теперь длину вектора $\vec{AN}$:

$$\begin{aligned}|\vec{AN}|^2 &= (\vec{a} + x\vec{b} + (1-x)\vec{c})^2 = \\ &= 17x^2 - 2x + 17 - 8(x + 1)^2 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Так как $|\vec{AN}|^2 = 4$,

$$17x^2 - 2x + 13 - 8(x + 1)^2 \cos \varphi = 0. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем $x = \frac{7}{9}$. Поэтому $\cos \varphi = \frac{55}{64}$.

Найдем теперь длину отрезка SO — высоту пирамиды. Так как O — центр треугольника ABC ,

$$\vec{SO} = \frac{1}{3}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}),$$

откуда

$$|\vec{SO}| = \frac{1}{3}\sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{48 + 96\cos \varphi} = \frac{\sqrt{58}}{2}.$$

Чтобы найти площадь основания пирамиды, вычислим $|\vec{AB}|^2$:

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \frac{9}{2}.$$

Теперь искомый объем

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|\vec{AB}|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot |\vec{SO}| = \frac{3\sqrt{174}}{16}.$$

Таблица 3

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	16	$16\cos \varphi$	$4\cos \varphi$
$\vec{b}$	$16\cos \varphi$	16	$4\cos \varphi$
$\vec{c}$	$4\cos \varphi$	$4\cos \varphi$	1

2. Расстояние от точки до плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

Дано: плоскость α с базисом $(\vec{a}; \vec{b})$, точка A , принадлежащая плоскости α , точка M , не лежащая в плоскости α , $\vec{AM} = \vec{m}$.

Найти: расстояние от точки M до плоскости α и угол между прямой AM и плоскостью α .

Схема решения этой задачи такова.

Пусть N — ортогональная проекция точки M на плоскость α (рис. 4). Тогда $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}$. Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условия перпендикулярности вектора $\vec{MN}$ векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

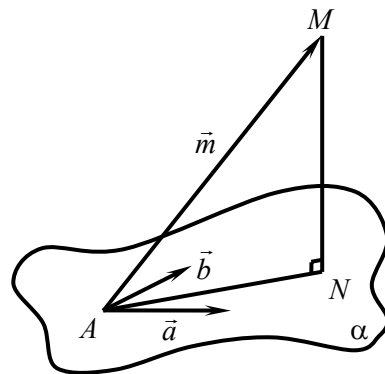


Рис. 4

$$\begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}) \cdot \vec{a} = 0, \\ (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}) \cdot \vec{b} = 0. \end{cases}$$

Зная x и y , находим расстояние от точки M до плоскости α , равное $\sqrt{(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m})^2}$.

Если $x\vec{a} + y\vec{b} \neq 0$, то угол между прямой AM и α равен углу между векторами $\vec{m}$ и $x\vec{a} + y\vec{b}$, а если $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$, то прямая AM перпендикулярна плоскости α .

Задача 4. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом $\angle A = 60^\circ$. Все ребра призмы имеют длину a . Точка K является ортогональной проекцией точки B_1 на плоскость $DA_1 C_1$, а точка L — ортогональной проекцией точки K на плоскость $DD_1 C_1 C$. Найдите объем пирамиды $DCLK$.

Решение. Примем за основание пирамиды $DCLK$ треугольник CDL , лежащий в плоскости $DD_1 C_1 C$. Тогда отрезок KL — высота пирамиды (рис. 5). Следовательно,

$$V_{KCDL} = \frac{1}{3} S_{CDL} \cdot KL = \frac{1}{6} DC \cdot LM \cdot KL,$$

где M — ортогональная проекция точки L на прямую DC .

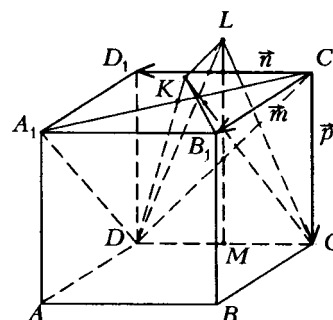


Рис. 5

Выберем в качестве базиса векторы $\vec{C_1 B_1} = \vec{m}$, $\vec{C_1 D_1} = \vec{n}$,

$\vec{C_1 C} = \vec{p}$ и заполним таблицу 4 — таблицу умножения для этого базиса.

Таблица 4

Далее,

$$\begin{aligned} \vec{B_1 K} &= \vec{C_1 K} - \vec{C_1 B_1} = x\vec{C_1 A_1} + y\vec{C_1 D} - \vec{C_1 B_1} = \\ &= x(\vec{m} + \vec{n}) + y(\vec{n} + \vec{p}) - \vec{m} = (x-1)\vec{m} + (x+y)\vec{n} + y\vec{p}. \end{aligned}$$

Так как вектор $\vec{B_1 K}$ перпендикулярен векторам $\vec{C_1 A_1}$ и $\vec{C_1 D}$, получаем систему

$$\begin{cases} \vec{B_1 K} \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = 0, \\ \vec{B_1 K} \cdot (\vec{n} + \vec{p}) = 0. \end{cases}$$

	$\vec{m}$	$\vec{n}$	$\vec{p}$
$\vec{m}$	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
$\vec{n}$	$\frac{a^2}{2}$	a^2	0
$\vec{p}$	0	0	a^2

Заменив вектор $\vec{B_1K}$ его разложением в базисе $(\vec{m}; \vec{n}; \vec{p})$ и воспользовавшись таблицей 4, придем после упрощений к системе уравнений $2x + y = 1$, $3x + 4y = 1$, откуда $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$.

$$\text{Следовательно, } \vec{C_1K} = \frac{3}{5}(\vec{m} + \vec{n}) - \frac{1}{5}(\vec{n} + \vec{p}) = \frac{1}{5}(3\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{p}).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \vec{KL} &= \vec{C_1L} - \vec{C_1K} = z\vec{C_1D_1} + t\vec{C_1C} - \vec{C_1K} = \\ &= z\vec{n} + t\vec{p} - \frac{1}{5}(3\vec{m} + 2\vec{n} - \vec{p}) = \frac{1}{5}(-3\vec{m} + (5z - 2)\vec{n} + (5t + 1)\vec{p}). \end{aligned}$$

Так как $\vec{KL} \cdot \vec{n} = 0$ и $\vec{KL} \cdot \vec{p} = 0$, то $-\frac{3}{2} + 5z - 2 = 0$, откуда $z = \frac{7}{10}$, и $5t + 1 = 0$, откуда $t = -\frac{1}{5}$. Следовательно,

$$\vec{KL} = \frac{1}{5}\left(-3\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}\right) = \frac{3}{10}(-2\vec{m} + \vec{n}).$$

Теперь можно найти высоту пирамиды $KCDL$:

$$KL = \frac{3}{10}\sqrt{(-2\vec{m} + \vec{n})^2} = \frac{3a\sqrt{3}}{10}.$$

Осталось найти $\vec{LM}$:

$$\vec{LM} = \vec{CL} - \vec{CM} = u\vec{CD} - (\vec{C_1L} - \vec{C_1C}) = u\vec{n} - z\vec{n} - t\vec{p} + \vec{p} = \left(u - \frac{7}{10}\right)\vec{n} + \frac{6}{5}\vec{p}.$$

Так как $\vec{LM} \cdot \vec{n} = 0$, то $u = \frac{7}{10}$, откуда $\vec{LM} = \frac{6}{5}\vec{p}$, $|\vec{LM}| = \frac{6a}{5}$.

Таким образом,

$$V_{KCDL} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot \frac{6a}{5} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{10} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}.$$

3. Расстояние и угол между скрещивающимися прямыми.

Дано: прямая l_1 с направляющим вектором $\vec{a}_1$, точка A_1 , принадлежащая прямой l_1 ; прямая l_2 , с направляющим вектором $\vec{a}_2$, точка A_2 , принадлежащая прямой l_2 ; $\vec{A_1A_2} = \vec{m}$.

Найти: расстояние и угол между прямыми l_1 и l_2 .

Задачи этого типа решаются по следующей схеме.

Косинус угла φ между прямыми l_1 и l_2 находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}.$$

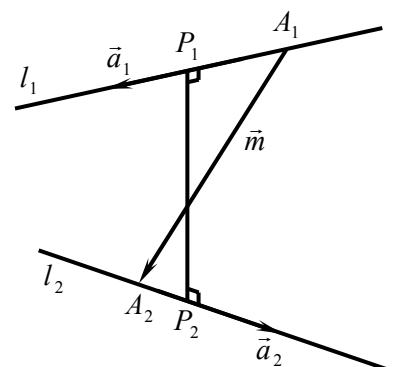


Рис. 6

Чтобы определить расстояние между прямыми l_1 и l_2 , то есть длину их общего перпендикуляра P_1P_2 ($P_1 \in l_1$, $P_2 \in l_2$, рис. 6),

подставим вектор $\vec{P_1P_2}$ в виде $\vec{P_1P_2} = \vec{P_1A_1} + \vec{A_1A_2} + \vec{A_2P_2} = x\vec{a}_1 + \vec{m} + y\vec{a}_2$. Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условий перпендикулярности вектора $\vec{P_1P_2}$ векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$:

$$\begin{cases} (x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 - \vec{m}) \cdot \vec{a}_1 = 0, \\ (x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 - \vec{m}) \cdot \vec{a}_2 = 0. \end{cases}$$

Искомое расстояние — длина вектора $\vec{P_1P_2}$, то есть $\sqrt{(x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + \vec{m})^2}$.

Задача 5. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .

Решение. Пусть M и N — середины ребер BC и AB (рис. 7).

Выберем в качестве базиса векторы $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$, $\vec{CS} = \vec{c}$. Таблица умножения для этого базиса — это таблица 5. Найдём угол φ между прямыми SN и CN :

$$\vec{SM} = \vec{CM} - \vec{CS} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{c}); \quad \vec{CN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Вычислим $\vec{SM} \cdot \vec{CN}$, $|\vec{SM}|$, $|\vec{CN}|$:

$$\vec{SM} \cdot \vec{CN} = 12, \quad |\vec{SM}| = 2\sqrt{3}, \quad |\vec{CN}| = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \varphi = \frac{12}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi = 45^\circ.$$

Вычислим теперь расстояние между прямыми SM и CN , т. е. длину их общего перпендикуляра PQ ($P \in SM$, $Q \in CN$):

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= x\vec{SM} + y\vec{CN} + \vec{SC} = \frac{x}{2}(\vec{b} - 2\vec{c}) + \frac{y}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} = \\ &= \frac{1}{2}(y\vec{a} + (x+y)\vec{b} - (2x+2)\vec{c}). \end{aligned}$$

Из условия перпендикулярности вектора $\vec{PQ}$ векторам $\vec{b} - 2\vec{c}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ получаем систему уравнений

$$3x + 3y = -1, \quad x + 2y = 0,$$

$$\text{откуда } x = -\frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\vec{PQ} = \frac{1}{6}(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}), \quad PQ = \frac{1}{6}\sqrt{(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

4. Угол между плоскостями.

Угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярными им прямыми. Действительно, пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис. 8). Через какую-нибудь точку, не лежащую на прямой c , проведем прямые a и b , перпендикулярные плоскостям α и β соответственно. Тогда плоскость, проходящая через прямые a и b , пересекает плоскости α и β по прямым a_1 и b_1 , перпендикулярные прямой c (рис. 8). Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a_1 и b_1 , который, в свою очередь, равен углу между прямыми a и b (так как прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости и $a \perp a_1$, $b \perp b_1$).

Таким образом, задача нахождения угла между плоскостями сводится к вычислению угла между прямыми.

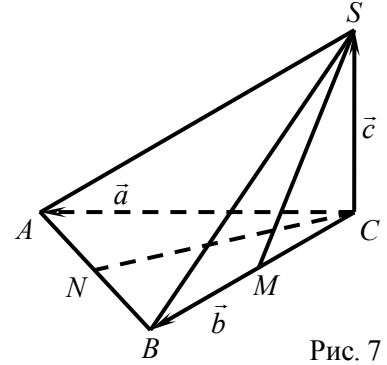


Рис. 7

Таблица 5

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	32	16	0
$\vec{b}$	16	32	0
$\vec{c}$	0	0	4

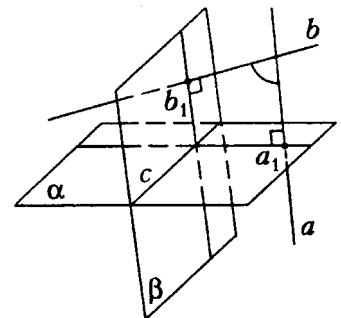


Рис. 8

Задача 6. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $SA = \sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SC и AC , плоскость β параллельна прямым SC и AB . Определите величину угла между плоскостями α и β .

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\vec{AS} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$. Таблица 6 — это таблица умножения для векторов этого базиса. Если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — нулевые векторы, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно, а φ — угол между этими плоскостями, то

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}.$$

В качестве вектора $\vec{m}$ можно взять любой ненулевой вектор, удовлетворяющий условиям $\vec{SB} \cdot \vec{m} = 0$, $\vec{AC} \cdot \vec{m} = 0$.

Запишем вектор $\vec{m}$ в виде $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Так как $\vec{SB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} (\vec{b} - \vec{a})(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 0, \\ \vec{c}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 0. \end{cases}$$

С помощью таблицы 6 приводим эту систему к виду $6x - 2y - z = 0$, $y + 2z = 0$.

Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных. Это объясняется тем, что вектор $\vec{m}$ условием $\vec{m} \perp \alpha$ не определен однозначно. Решение такой системы сводится к выражению двух неизвестных через третье. Выразим x и y через z : $x = -\frac{1}{2}z$, $y = -2z$.

Положив теперь, например, $z = -2$, найдем x и y : $x = 1$, $y = 4$. Вектор $\vec{m} = \vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ — один из ненулевых векторов, перпендикулярных плоскости α .

Аналогично будем искать ненулевой вектор $\vec{n} = t\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$, перпендикулярный плоскости β : $\vec{SC} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$;

$$\begin{cases} (\vec{c} - \vec{a})(t\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}) = 0, \\ \vec{b}(t\vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}) = 0, \end{cases}$$

так что $y = -\frac{1}{2}u$, $v = -2u$.

Можно взять $u = -2$. Тогда $v = 4$, $t = 1$, так что $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$. (Выражение для вектора $\vec{n}$ можно было получить из выражения для вектора $\vec{m}$, заметив, что условие, задающее плоскость β , получается из условия, задающего плоскость α , перестановкой точек B и C .)

Теперь вычисляем $\cos \varphi$:

$$\begin{aligned} \vec{m} \cdot \vec{n} &= (\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c})(\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}) = -3, \\ |\vec{m}| &= \sqrt{(\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c})^2} = \sqrt{15}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{15}, \quad \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi = \arccos \frac{1}{5}$.

Таблица 6

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	3	0	0
$\vec{b}$	0	1	$\frac{1}{2}$
$\vec{c}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Упражнения

1. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC , а точка M — середина стороны AD . Найдите AD , если $AK = 6$, $AM = 3$ и $\angle KAM = 60^\circ$.
Ответ: 4.
2. В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC , а точка E — середина ребра AB . Найдите угол между прямыми MN и DE .
Ответ: $\arccos \frac{5\sqrt{3}}{18}$.
3. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , длины катетов AB и AC которого равны α . Боковые ребра AA' , BB' , CC' образуют с плоскостью основания углы в 60° , а диагональ BC' боковой грани $CBB'C'$ перпендикулярна ребру AC . Найдите объем призмы, если длина диагонали BC' равна $a\sqrt{6}$.
Ответ: $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$, $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.
4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна a , длина бокового ребра равна $\frac{a}{2}$. Точка D является ортогональной проекцией середины ребра A_1C_1 на плоскость AB_1C , а точка E — ортогональной проекцией точки D на плоскость AA_1B_1B . Найдите объем пирамиды A_1B_1DE .
Ответ: $\frac{3a^3\sqrt{3}}{256}$.
5. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a , боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC , параллельные плоскости SAD .
 - а). Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BD такую, что $\frac{BM}{DB} = \frac{1}{3}$. Найдите его длину.
Ответ: $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.
 - б). Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.
Ответ: $\frac{a\sqrt{10}}{4}$.