Дмитрий Гущин, Санкт-Петербург

ВРЕМЯ НЕ ЖДЁТ

Только ленивый не участвовал еще в спорах по поводу ЕГЭ, и к настоящему моменту, пожалуй, все содержательные аргументы как «за», так и «против» уже высказаны, причём не по одному разу. Бесконечность этих споров отчасти обусловлена тем, что по понятным причинам большинство россиян не имеют личного опыта сдачи экзаменов в такой форме, а самые ожесточённые споры всегда ведутся о том, о чём у спорящих недостаточно сведений.

Зная ЕГЭ с точки зрения учителя, заместителя директора школы, преподавателя вуза, преподавателя подготовительных курсов, председателя жюри «абитуриентских» математических олимпиад, я не буду включаться в эту полемику. Отмечу только, что большинство выступающих с обеих сторон являются представителями «вузоцентристской» модели школьного образования, и, зачастую даже не отдавая себе в этом отчёта, предполагают, что если не единственная, то, безусловно, главная цель обучения в школе — усвоение некоторого массива информации. Осознание этого факта принципиально обусловливает взгляд на форму и содержание какого бы то ни было школьного экзамена. И если получить ответ на самый существенный, первоочередной для любой образовательной системы вопрос — зачем мы учим детей и чему мы их должны научить, то все остальные вопросы справедливо покажутся вторичными и не очень сложными.

Полагаю, наш читатель согласен с тем, что любой выпускник школы после 11 лет изучения математики должен уметь считать, читать графики и диаграммы, уметь строить простейшие математические модели окружающей действительности. Проблема состоит в том, что как раз наши выпускники этого не умеют. Конечно, сейчас мы говорим не про лучших из лучших — мы про то, что 25% — не могут решить 7 простейших задач из 26, а 7% выпускников не могут решить даже 4 самых простые задачи. Мы говорим про то, что наше «лучшее физико-математическое образование» уже настолько не лучшее, что даже и не образование. Именно это демонстрировал ЕГЭ по математике несколько последних лет.

Представляется, что читатель согласится: сама по себе эта ситуация не изменится, а наиболее быстро и эффективно решить проблему катастрофического падения уровня российского математического образования может только изменение экзаменационного материала, предлагаемого выпускникам школы на национальном экзамене. Именно он задаёт конечный ориентир, к которому стремятся дети, их родители, школьные учителя и управленцы.

В связи с этим нужно отметить, что варианты контрольно-измерительных вариантов по математике, использовавшиеся на экзаменах в 2001—2009 годах, в целом были составлены грамотно и логично, но… Похоже, что у составителей не было никакой другой идеи, кроме как записать пару десятков заданий в определённом порядке — от простых к сложным. (К сожалению, таковы КИМы почти по всем предметам.) Само по себе это разумно, конечно, но смысл обучения детей в школе не сводится к тому, чтобы научиться отвечать на вопросы, упорядоченные по возрастанию сложности. А экзаменационный материал по математике должен хоть каким-то образом контролировать не только знание формул и теорем, но и то, ради чего мы одиннадцать лет учим математике всех граждан страны. Новая модель контрольно-измерительных материалов ЕГЭ по математике, к разбору которой мы вскоре перейдём, отвечает нашим целям куда в большей степени.

Итак, в структуру и содержание экзаменационной работы внесены следующие изменения:

– общее число заданий уменьшено до 18;

– число частей работы уменьшено до двух;

– исключены задания с выбором ответа;

– добавлены задания на проверку общематематических компетенций учащихся;

– увеличено число заданий с полной записью решения;

– увеличена доля заданий по геометрии.

Для чего это было сделано? Чтобы была возможность не гнаться за количеством в ущерб качеству. Чтобы кто-то мог сосредоточиться и, подольше подумав над простыми задачами, верно решить их, в то время как другой, не тратя лишнего времени на несложные задания, более полно проявил себя в решении сложных задач. Чтобы никто не называл национальный экзамен «угадайкой», и чтобы он даже теоретически ни для кого не мог таковым являться. Чтобы увеличенное число геометрических заданий разного уровня сложности вновь привлекло к изучению этого предмета, столь часто прерывавшееся в последнее время прагматическим «они такие сложные, что всё равно на экзамене решить не смогу». Чтобы школьная математика обрела, наконец, связь с реальностью, и что бы каждый хотя бы отчасти учился и научался тем знаниям, которые действительно необходимы в обычной жизни.

Что делать, если на сегодняшний момент ученики не готовы к экзамену по таким КИМам? Во-первых, понять причины. Отчего ученик не может решить первую, вторую, пятую задачи, соответствующие программе 6 класса? Их может и должен решать любой разумный человек без какой-либо специальной подготовки. А уж если ребёнок и этого решить не может, то и аттестат зрелости ему получать рано. Не зрел он ещё. Так получается. Тогда вместо того, чтобы за высшую математику приниматься добейтесь сначала усвоения базового материала. Правильно спланировав работу, вы и азы математики с ребёнком изучите, и к экзамену автоматически подготовитесь. Мы вообще не придерживаемся мысли, что экзамен — это такое испытание, к которому нужно готовиться много лет (в крайнем случае, месяцев), прорешивая тысячи однотипных заданий. Нужно качественно изучать программу, решать задачи из школьных учебников, уделять внимание текущему и обобщающему повторению, заниматься на уроках устной работой, проверять домашние задания — короче говоря, честно делать свою обычную работу. И тогда экзамен не страшен!

СПРАВКА:

Новая модель КИМов содержит 18 заданий, сгруппированных в две части.

Часть 1 состоит из 12 заданий типа «В» (задания с кратким ответом).

Часть 2 состоит из 6 заданий — типа «С».

Из 18 заданий базовый уровень сложности имеют 12, повышенный — 4, высокий — 2.

Правильное решение каждого из заданий В1— В12 части 1 оценивается 1 баллом.

Правильное решение каждого из заданий С1 и С2 оценивается 2 баллами, каждого из заданий С3 и С4 — 3 баллами, каждого из заданий С5 и С6 — 4 баллами.

Максимальный первичный балл — 30.

Работа рассчитана на 4 часа (240 минут).

Содержание и структура экзаменационной работы дают возможность проверить усвоение курсов математики 5—6 классов, алгебры 7—9 классов, алгебры и начал анализа 10—11 классов и геометрии 7—11 классов. При этом, в частности, проверяются умения использовать полученные знания в практической деятельности и в повседневной жизни, а также умения строить и исследовать математические модели.

РАЗБОР ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ (НОВАЯ МОДЕЛЬ КИМов)

Часть B

1. (Б) *	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	5 мин.	2 мин.

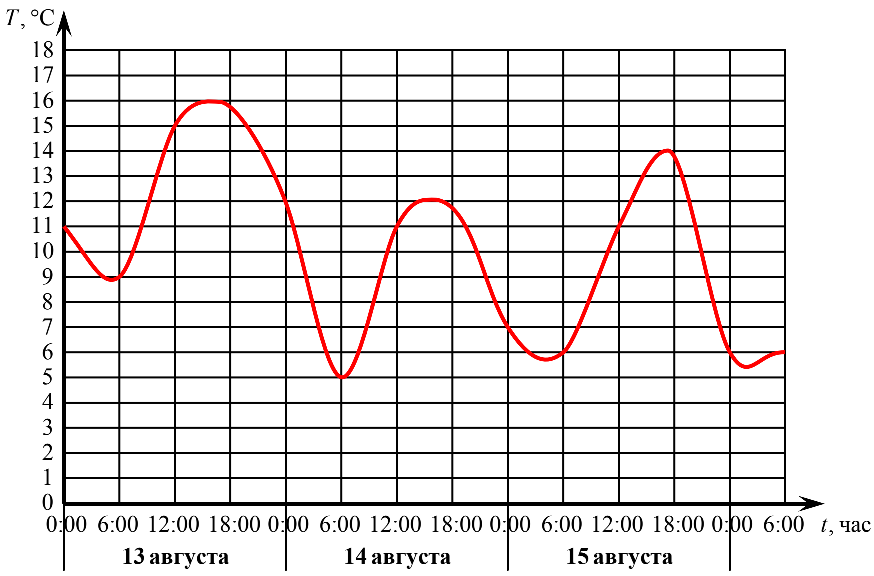
B1. Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20 %?

Решение. После повышения цены билет будет стоить $15 \cdot 1{,}2 = 18$ рублей. Поскольку $100:18 = 5\frac{5}{9}$, на 100 рублей можно купить не больше 5 билетов.

Ответ: 5.

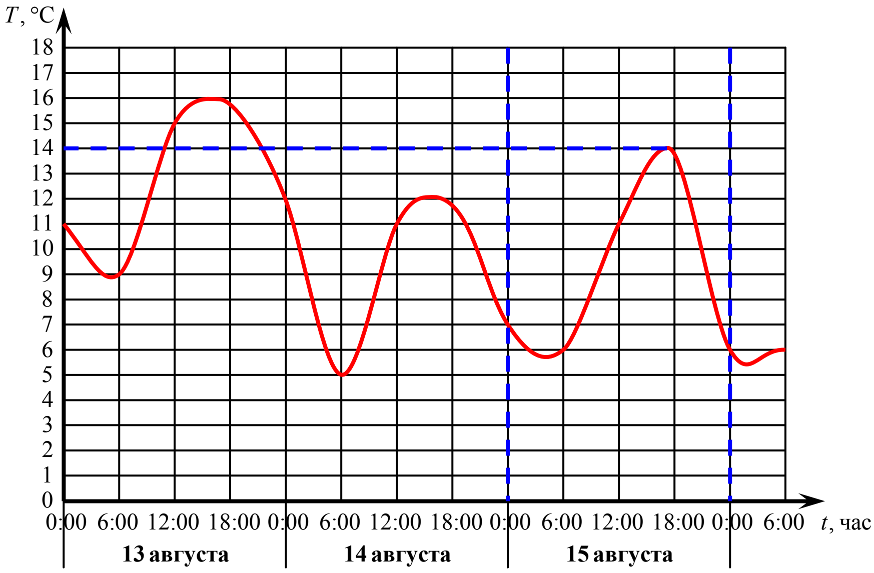
2. (Б)	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	5 мин.	2 мин.

B2. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа.



Решение. Из графика видно, что 15 августа наибольшая температура воздуха составила 14 °C (см. рисунок).

* Буквами обозначен уровень сложности задания: Б — базовый, П — повышенный, В — высокий.



Ответ: 14.

3. (Б)	Уметь решать уравнения и неравенства	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	8 мин.	3 мин.

B3. Найдите корень уравнения $3^{x-2}=27$.

Решение. Последовательно получаем:

$$3^{x-2}=27 \Leftrightarrow 3^{x-2}=3^3 \Leftrightarrow x-2=3 \Leftrightarrow x=5.$$

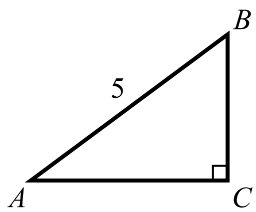
Ответ: 5.

4. (Б)	Уметь выполнять вычисления и преобразования	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	10 мин.	3 мин.

B4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB=5$, $\cos A=0{,}8$. Найдите катет BC.

Решение.

1-й способ. Поскольку угол A острый, $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=$ $=\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}6$. Тогда $BC=AB\cdot\sin A=5\cdot 0{,}6=3$.



2-й способ. Длина катета AC равна $AB\cdot\cos A=5\cdot 0{,}8=4$. По теореме Пифагора $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Ответ: 3.

5. (Б)	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	15 мин.	7 мин.

B5. Строительная фирма планирует купить 70 куб. м пеноблоков у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. В какую сумму обойдётся самая дешёвая покупка с доставкой? Ответ дайте в рублях.

Поставщик	**Стоимость пеноблоков (р. за 1 куб. м)**	**Стоимость доставки (р.)**	**Дополнительные условия доставки**
1	2600	10000	
2	2800	8000	При заказе товара на сумму свыше 150 000 р. доставка бесплатная.
3	2700	8000	При заказе товара на сумму свыше 200 000 р. доставка бесплатная.

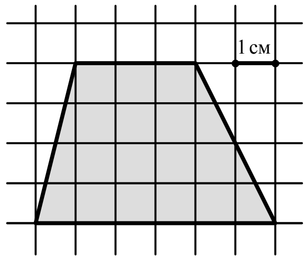
Решение. Стоимость пеноблоков у первого поставщика составит $2600 \cdot 70 = 182\,000$ р., их доставка — ещё $10\,000$ р.; поэтому общая стоимость покупки — 192 000 рублей. Стоимость пеноблоков у второго поставщика составит $2800 \cdot 70 = 196\,000$ р.; в соответствии с дополнительными условиями (сумма заказа превышает $150\,000$ р.) их доставка будет бесплатной. Стоимость пеноблоков у третьего поставщика составит $2700 \cdot 70 = 189\,000$ р.; в соответствии с дополнительными условиями (сумма заказа меньше 200 000 р.) доставку нужно будет оплачивать и полная стоимость покупки вместе с доставкой составит $189\,000 + 8000 = 197\,000$ р.

Поэтому самая дешёвая покупка с доставкой будет у первого поставщика.

Ответ: 192000.

6. (Б)	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	14 мин.	5 мин.

B6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1×1 см изображён четырёхугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Решение. На рисунке изображена трапеция с высотой 4 см и основаниями 3 и 6 см. Площадь трапеции равна $4 \cdot (3+6) : 2 = 18$ кв. см.

Ответ: 18.

7. (Б)	Уметь выполнять вычисления и преобразования	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	10 мин.	3 мин.

B7. Найдите значение выражения $\log_2 200 + \log_2 \frac{1}{25}$.

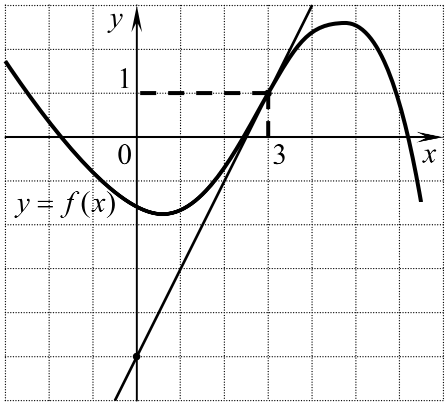
Решение. Используя свойство логарифмов $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$, имеем:

$$\log_2 200 + \log_2 \frac{1}{25} = \log_2 \frac{200}{25} = \log_2 8 = 3.$$

Ответ: 3.

8. (Б)	Уметь выполнять действия с функциями	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	14 мин.	5 мин.

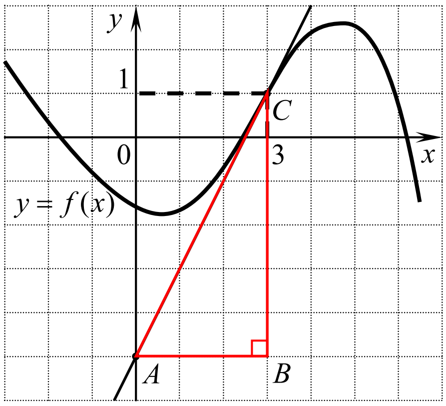
B8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.



Решение.

1-й способ. Значение производной функции в точке x равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона к оси абсцисс касательной к графику функции, проведённой в его точке с абсциссой x.

Построим прямоугольный треугольник ABC с вершинами в точках $(0; -5)$, $(3; -5)$ и $(3; 1)$ (см. рис.). Угол наклона касательной к оси абсцисс равен углу CAB — углу между прямой CA и положительным направлением оси абсцисс. Поскольку $AB = 3$, $BC = 6$



$$\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{3} = 2.$$

2-й способ. Для нахождения углового коэффициента касательной можно воспользоваться следующим утверждением. Если прямая проходит через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, где $x_1 \neq x_2$, то её угловой коэффициент равен

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Из графика видно, что касательная проходит через точки $(0; -5)$ и $(3; 1)$, значит, её угловой коэффициент равен

$$\frac{1-(-5)}{3-0} = 2.$$

Ответ: 2.

9. (Б)	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	25 мин.	5 мин.

B9. Объём первого цилиндра равен 12 куб. м. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

Решение. Пусть объём первого цилиндра равен $V_1 = \pi R_1^2 H_1$, объём второго — $V_2 = \pi R_2^2 H_2$, где $R_{1,2}$ — радиусы оснований цилиндров, $H_{1,2}$ — их высоты. По условию $H_2 = 3H_1$, $R_2 = 0{,}5R_1$.

Выразим объём второго цилиндра через объём первого:

$$V_2 = \pi R_2^2 H_2 = \pi\left(\frac{R_1}{2}\right)^2 3H_1 = \frac{3}{4}(\pi R_1^2 h_1) = \frac{3}{4}V_1,$$

Откуда

$$V_2 = \frac{3}{4}\cdot 12 = 9 \text{ куб. м.}$$

Ответ: 9.

10. (Б)	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	22 мин.	10 мин.

B10. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

Решение. Выясним, в какие промежутки времени камень находился на заданной высоте. Для этого решим неравенство $h(t) \ge 9$:

$$h(t) \ge 9 \Leftrightarrow -5t^2 + 18t \ge 9 \Leftrightarrow 5t^2 - 18t + 9 \le 0 \Leftrightarrow 0{,}6 \le t \le 3.$$

Отсюда камень находился на высоте не менее 9 метров $3 - 0{,}6 = 2{,}4$ секунды.

Ответ: 2,4.

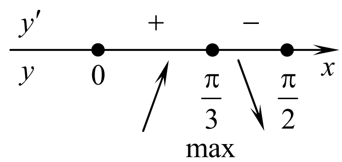
11. (Б)	Уметь выполнять действия с функциями	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	20 мин.	10 мин.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 2\cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдём производную заданной функции: $y' = 2\sin x + \sqrt{3}$ и решим уравнение $y' = 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases} y' = 0, \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sin x + \sqrt{3} = 0, \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x=\frac{\pi}{3}$ заданная функция имеет максимум, являющийся её наибольшим значением на заданном отрезке. Найдём это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\,\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}=1\,.$$

Примечание. Вместо исследования знаков производной можно было исследовать знак второй производной. Поскольку $y''(x)\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=(-2\cos x)\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-1<0$, в точке $x=\frac{\pi}{3}$ функция y имеет максимум.

Ответ: 1.

12. (Б)	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
1	22 мин.	10 мин.

B12. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

Решение. Обозначим v_1 и v_2 — объёмы работ, которые выполняют за день первый и второй рабочий, соответственно, полный объём работ примем за 1. Тогда по условию задачи $12(v_1+v_2)=1$ и $2v_1=3v_2$. Решим полученную систему:

$$\begin{cases}12(v_1+v_2)=1,\\ 2v_1=3v_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12(v_1+\frac{2}{3}v_1)=1,\\ v_2=\frac{2}{3}v_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v_1=\frac{1}{20},\\ v_2=\frac{1}{30}.\end{cases}$$

Тем самым, первый рабочий за день выполняет одну двадцатую всей работы, значит, работая отдельно, он справится с ней за 20 дней.

Ответ: 20.

Часть С

13. (П)	Уметь решать уравнения и неравенства	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
2	30 мин.	20 мин.

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+3x-\sqrt{x^2+3x-1}=7,\\ 2\sqrt{2}\sin y=x.\end{cases}$

Решение. Решим первое уравнение системы.

1-й способ. Пусть $x^2+3x=t$, тогда уравнение примет вид $t-\sqrt{t-1}=7$.

Далее имеем:

$$t-\sqrt{t-1}=7 \Leftrightarrow \sqrt{t-1}=t-7 \Leftrightarrow \begin{cases} t-7\ge 0, \\ t-1=(t-7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 6, \\ t^2-15t+50=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 6, \\ \left[\begin{array}{l} t=5; \\ t=10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=10.$$

Отсюда

$$x^2+3x=10 \Leftrightarrow x^2+3x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2. \end{array}\right.$$

2-й способ. Пусть $\sqrt{x^2+3x-1}=t$, тогда $x^2+3x=t^2+1$ и уравнение примет вид $t^2+1-t=7$, тогда $t^2-t-6=0$, откуда $t=-2$ или $t=3$. Поскольку $t\ge 0$, имеем: $t=3$, откуда

$$\sqrt{x^2+3x-1}=3 \Leftrightarrow x^2+3x-1=9 \Leftrightarrow x^2+3x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2. \end{array}\right.$$

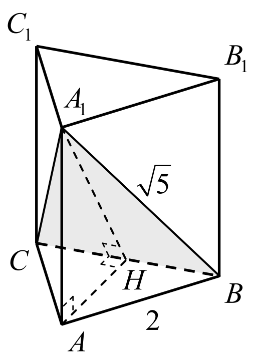
Для исходной ситемы уравнений получаем:

$$\begin{cases} x^2+3x-\sqrt{x^2+3x-1}=7, \\ 2\sqrt{2}\sin y=x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-5, \\ \sin y=-\dfrac{5}{2\sqrt{2}}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ \sin y=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{array}\right. \underset{-\frac{5}{2\sqrt{2}}<-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=2, \\ y=(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $(2;(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z})$.

14. (П)	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
3	40 мин.	25 мин.

С2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.



Решение. Требуется найти угол между плоскостями ABC и A_1BC (см. рис.). Проведём AH — высоту треугольника ABC. По теореме о трёх перпендикулярах наклонная A_1H перпендикулярна BC, поэтому угол A_1HA — линейный угол искомого двугранного угла. Найдём тангенс угла A_1HA.

Высота в равностороннем треугольнике со стороной 2 равна $\sqrt{3}$. Т. е. $AH=\sqrt{3}$. По условию $AB=2$, $A_1B=\sqrt{5}$, значит, по теореме Пифагора $AA_1=\sqrt{A_1B^2-AB^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$.

Поэтому:

$$\operatorname{tg}\angle A_1HA=\frac{A_1A}{AH}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \angle A_1HA=30^\circ .$$

Ответ: 30°.

15. (В)	Уметь решать уравнения и неравенства	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
3	—	30 мин.

С3. Решите неравенство $\log_{x+3}(9-x^2)-\frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2\geq 2$.

Решение. Найдем область определения неравенства:

$$\begin{cases}0<x+3\neq 1,\\ 9-x^2>0,\\ (x-3)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3<x<-2;\\ -2<x<3.\end{array}\right.$$

На области определения неравенства воспользуемся формулами $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ и $\log_a^n(b^m)=m^n\log_a^n b$. Получаем:

$$\log_{x+3}(9-x^2)=\log_{x+3}(3+x)(3-x)=\log_{x+3}(3+x)+\log_{x+3}(3-x)=1+\log_{x+3}(3-x),$$
$$\log^2_{x+3}(x-3)^2=4\log^2_{x+3}(3-x),$$

откуда

$$\log_{x+3}(9-x^2)-\frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2\geq 2\Leftrightarrow 1+\log_{x+3}(3-x)-\frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x)\geq 2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\geq \log^2_{x+3}(3-x)-4\log_{x+3}(3-x)+4\leq 0\Leftrightarrow(\log_{x+3}(3-x)-2)^2\leq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{x+3}(3-x)=2\Leftrightarrow 3-x=(x+3)^2\Leftrightarrow x^2+7x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;\\ x=-6.\end{array}\right.$$

Из полученных решений только первое лежит в области определения неравенства; оно является ответом к задаче.

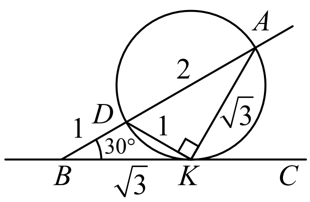
Ответ: -1.

16. (В)	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
3	—	30 мин.

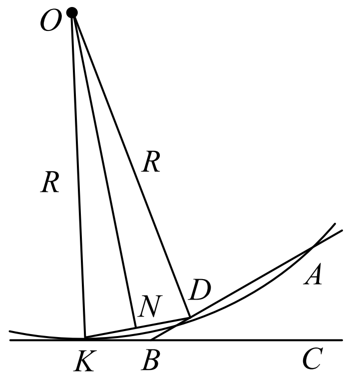
С4. На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD=2$ и $BD=1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

Решение.

1-й способ. Пусть K — точка касания окружности с прямой BC. Рассмотрим два случая: точка K лежит на отрезке BC, и точка K лежит вне отрезка BC.



1-й случай (см. рис.). По свойству секущих $BK^2=BD\cdot BA$, откуда $BK=\sqrt{3}$. Используя теорему косинусов, получаем: из треугольника BDK, что $DK=1$; из треугольника BAK, что $AK=\sqrt{3}$. Отсюда ясно, что треугольник ADK — прямоугольный, следовательно, AD — диаметр окружности, а её радиус равен 1.

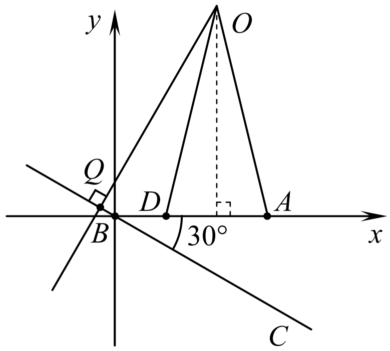


2-й случай (см. рис.). По свойству секущих $BK^2 = BD \cdot BA$, откуда $BK = \sqrt{3}$. Используя теоремы синусов и косинусов, из треугольника BDK получаем, что $DK = \sqrt{7}$, $\sin\angle DKB = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

Пусть точка O — центр заданной окружности, тогда OK и OD — её радиусы. Треугольник KOD — равнобедренный; пусть точка N — середина его основания KD.

Тогда
$$OK = \frac{ON}{\cos\angle OKN} = \frac{DK}{2\cos\angle OKN} = \frac{DK}{2\sin\angle DKB} = \frac{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}}{2\cdot 1} = 7.$$

Ответ: 1 или 7.



2-й способ. Решим задачу методом координат.

Поместим угол ABC в декартову систему координат так, что вершина угла совпадает с началом координат, сторона BA совпадает с лучом $0x$, а сторона BC находится в нижней полуплоскости.

В этой системе координат точка D имеет координаты $(1; 0)$, точка A — $(3; 0)$. Точка O — центр окружности — лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AD, значит, её абсцисса равна 2, обозначим её ординату z. Радиус окружности равен $\sqrt{1+z^2}$.

Прямая BC задаётся уравнением $y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$. Прямые, перпендикулярные к прямой BC, имеют вид $y = x\sqrt{3} + b$. Найдём среди них ту, которая проходит через точку O:

$$z = 2\sqrt{3} + b \Leftrightarrow b = z - 2\sqrt{3},$$

и, значит,

$$y = x\sqrt{3} + z - 2\sqrt{3}.$$

Пусть Q — точка пересечения найденной прямой с прямой BC. Её координаты являются решением системы:

$$\begin{cases} y = x\sqrt{3} + z - 2\sqrt{3}, \\ y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3} + z - 2\sqrt{3}, \\ y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6 - z\sqrt{3}}{4}, \\ y = \dfrac{z - 2\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Для того чтобы окружность касалась прямой BC, расстояние между точками $O(2; z)$ и $Q\left(\dfrac{6 - z\sqrt{3}}{4}; \dfrac{z - 2\sqrt{3}}{4}\right)$ должно равняться радиусу окружности:

$$\sqrt{\left(2 - \frac{6 - z\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{z - 2\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{1+z^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - (6 - z\sqrt{3}) + \left(\frac{6 - z\sqrt{3}}{4}\right)^2 + z^2 - \frac{z(z - 2\sqrt{3})}{2} + \left(\frac{z - 2\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z(z-4\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0, \\ z=4\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Отсюда, радиус $\sqrt{1+z^2}$ равен 1 или 7.

17. (B)	Уметь решать уравнения и неравенства	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
4	—	30 мин.

С5. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

1-й способ. Запишем уравнение в виде $9|x-1|-4x+|3x-|x+a||=0$. Функция $f(x)=9|x-1|-$ $-4x+|3x-|x+a||$ непрерывна и:

а) возрастает на луче $[1;\ +\infty)$, так как при $x \geq 1$ для любого раскрытия модулей имеем:

$$f(x)=9(x-1)-4x \pm (3x \pm (x \pm a))=kx+m,$$

где $k \geq 9-4-4=1>0$;

б) убывает на луче $(-\infty;\ 1]$, так как при $x \leq 1$ для любого раскрытия модулей имеем:

$$f(x)=-9x+9-4x \pm 3x \pm x \pm a=kx+m,$$

где $k \leq -9-4+4=-9<0$.

Следовательно, наименьшее значение функция f принимает при $x=1$, и уравнение $f(x)=0$ будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 0$.

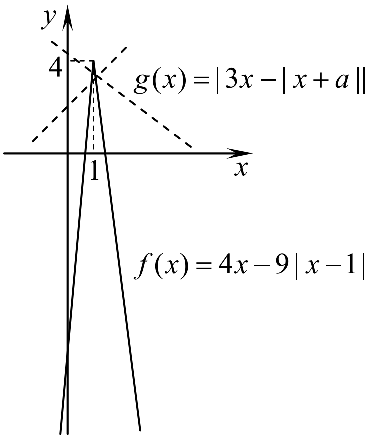
Решим это неравенство:

$$f(1) \leq 0 \Leftrightarrow -4+|3-|1+a|| \leq 0 \Leftrightarrow |3-|1+a|| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq |a+1|-3 \leq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |a+1| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq a+1 \leq 7 \Leftrightarrow -8 \leq a \leq 6.$$

2-й способ. Запишем уравнение в виде $4x-9|x-1|=|3x-|x+a||$. Пусть $f(x)=4x-9|x-1|$ и $g(x)=|3x-|x+a||$, тогда

$$f(x)=\begin{cases} 13x-9, & x \leq 1; \\ -5x+9, & x \geq 1, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} |4x+a|, & x \leq -a; \\ |2x-a|, & x \geq -a. \end{cases}$$

Угловые коэффициенты прямых, содержащих отрезки графика функции $y=g(x)$, меньше по модулю, чем угловые коэффициенты прямых, содержащих отрезки графика функции $y=f(x)$ (см. рис.). Следовательно, для того чтобы данное уравнение имело хотя бы один корень необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $g(1) \leq 4$:



$$|3-|1+a|| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq 3-|1+a| \leq 4 \Leftrightarrow |a+1| \leq 7 \Leftrightarrow -8 \leq a \leq 6..$$

Ответ: $-8 \leq a \leq 6$.

18. (B)	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	
Максимальный балл за задание	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
4	—	40 мин.

С6. Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного $\frac{b}{a}$.

Решение.

1-й способ. Пусть десятичная запись числа b состоит из n цифр. Тогда по условию задачи можно записать равенство

$$a+\frac{b}{10^n}=\frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2+\frac{ab}{10^n}=b.$$

Поскольку числа a и b — натуральные, то $\frac{ab}{10^n}$ тоже натуральное число, причём $\frac{ab}{10^n}<b$.

По условию задачи при делении несократимой дроби на a получается конечная десятичная дробь, значит, $a=2^p5^q$, где p и q — целые неотрицательные числа одновременно не равные нулю. Рассмотрим три случая.

1-й случай. $a=A\cdot 10^n$. Тогда $\frac{ab}{10^n}$ будет не меньше b. Противоречие.

2-й случай. $a=A\cdot 5^n$, $b=B\cdot 2^n$. Тогда $A^2\cdot 25^n+AB=B\cdot 2^n \Leftrightarrow A(A\cdot 25^n+B)=B\cdot 2^n$, значит, A — делитель числа $B\cdot 2^n$. Поскольку a и b взаимно простые, то $A=1$. С другой стороны $A^2\cdot 25^n+AB=B\cdot 2^n \Leftrightarrow A^2\cdot 25^n=B(2^n-A)$, поэтому B — делитель числа $A^2\cdot 25^n$. Поскольку a и b взаимно простые, то $B=1$.

Получаем уравнение $25^n+1=2^n$. Поскольку для любого натурального числа n справедливо $25^n>2^n$, это уравнение не имеет решений.

3-й случай. $a=A\cdot 2^n$, $b=B\cdot 5^n$. Аналогично второму случаю: $A=1$, $B=1$. Получаем уравнение $4^n+1=5^n$ или $1+(0,25)^n=(1,25)^n$ Решением этого уравнения является $n=1$, откуда $a=2$, $b=5$. Других решений уравнение иметь не может, поскольку его левая и правая части разномонотонны.

Ответ: $a=2$, $b=5$.

2-й способ. Пусть десятичная запись числа b состоит из n цифр. Тогда по условию задачи можно записать равенство

$$\frac{b}{a}=a+\frac{b}{10^n} \Leftrightarrow 10^n(b-a^2)=ab.$$

Из условия следует, что $b>a$. Так как числа a и b взаимно простые, числа $b-a^2$ и ab тоже взаимно простые. (Действительно, пусть p — общий простой делитель этих чисел. Тогда если p делитель a, то p будет делителем b. Если же p — делитель b, то p будет делителем a^2, значит, p — делитель a. Это противоречит условию задачи.)

Поэтому $b-a^2=1$ и, следовательно, $ab=10^n$. Последнее равенство при взаимно простых a и b возможно только в двух случаях:

а) $b=10^n$, $a=1$, но в этом случае не выполняется равенство $b-a^2=1$;

б) $b=5^n$, $a=2^n$. В этом случае равенство $b-a^2=1$ принимает вид

$$5^n-4^n=1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^n=1+\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Функция $f(n)=\left(\frac{5}{4}\right)^n$ возрастает, а функция $g(n)=1+\left(\frac{1}{4}\right)^n$ убывает. Поэтому уравнение $f(n)=g(n)$ имеет не более одного корня. Его единственным решением является $n=1$, откуда $a=2$, $b=5$.