Санкт-Петербургский государственный университет, 1981 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. При каких значениях параметра a найдутся значения параметра b из интервала $(0;1)$ такие, что уравнение $x\cos x\sin b - a\sin x\cos b = x\cos x\cos b$ имеет по крайней мере два решения на интервале $\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$?
2. Дана окружность единичного радиуса. Рассмотрим всевозможные описанные вокруг этой окружности четырехугольники с двумя фиксированными углами. Каковы должны быть остальные два угла, чтобы площадь четырехугольника была наименьшей?
3. Вычислите величину $A=\cos\alpha+\sin 2\alpha+\cos 3\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{3}$.
4. Решите неравенство $\log_{(x-1)^2} x^2 \geq \dfrac{1}{2}$.
5. Найдите объем неправильной четырехугольной пирамиды, если ее основание есть квадрат, координаты его двух вершин A и B суть $A=(1;0;2)$, $B=(-3;-2;0)$, боковые грани являются равнобедренными треугольниками, а основание высоты лежит на середине отрезка AB.

Вариант 2

1. При каких значениях параметра a найдутся значения параметра b такие, что уравнение $x^2-2x\ln\dfrac{x}{a}+2\ln\dfrac{x}{b}-1=0$ имеет по крайней мере два решения на интервале $(0;1)$?
2. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. На стороне AC выбирается точка P. Каким должен быть угол PBA, чтобы отношение площади вписанного в треугольник PBA круга к площади треугольника PBA было наибольшим?
3. Вычислите величину $A=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}3\alpha$, если $\cos 4\alpha=\dfrac{1}{8}$ и угол 2α лежит в третьей четверти.
4. Решите неравенство $\log_{x^2}(x-1)^2 \leq \dfrac{1}{2}$.
5. Найдите объем шара, вписанного в куб, о котором известно, что три его вершины имеют координаты $(2;1;-1)$, $(-5;0;-1)$ и $(-2;4;4)$.

Вариант 3

1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt[3]{\frac{1}{3}x^3+x+1}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3+x-1}=\sqrt[3]{ax}$ имеет ровно четыре корня (областью определения функции $y=\sqrt[3]{x}$ считать числовую ось)?
2. Около равностороннего треугольника ABC описана окружность. Где на этой окружности следует выбрать точку, чтобы произведение расстояний от этой точки до вершин треугольника было не меньше всех остальных?
3. При каких натуральных n справедливо неравенство $\frac{4n^2+(\log_3 7+3)n-12}{n^3+n+2\log_4 7}>1$?
4. Решите неравенство $\sqrt{2x+3}>3x-\frac{4}{3}$.
5. Прямая l образует в пространстве равные непрямые углы с тремя прямыми, пересекающимися в точке, принадлежащей l. Как выбрать на этих прямых по точке, чтобы прямая l была перпендикулярна плоскости, проходящей через эти три точки?

Вариант 4

1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt[3]{1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{4}x-\frac{1}{x^2}}=a$ имеет ровно три корня (областью определения функции $y=\sqrt[3]{x}$ считать числовую ось)?
2. Около равностороннего треугольника описана окружность. Где на этой окружности следует выбрать точку, чтобы сумма расстояний от этой точки до вершин треугольника было не меньше остальных?
3. При каких натуральных n справедливо неравенство $\frac{7n^2-n+\cos(n^2+2)}{n^4+7n-n\log_3 10}>1$?
4. Решите неравенство $\sqrt{x^2-2x-3}\geq 2+\frac{x}{2}$.
5. Прямая l образует в пространстве равные углы с тремя попарно параллельными прямыми, лежащими в одной плоскости. Найдите угол между прямой l и этой плоскостью.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1981 год
физический факультет

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} (\sin x+\cos y)^2+\sqrt{2+\sin 2x+2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=6, \\ \cos y(1+2\cos x-\cos y)=\cos x(1+\cos x). \end{cases}$
2. Вокруг равнобедренного треугольника с углом α при основании описана окружность с радиусом *R*. Найдите наибольшую сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин треугольника.
3. Решите неравенство $(x+1)^2\le(3x+1)(\sqrt{x+2}-1)^2$.
4. Решите уравнение $\log_3(x-3)+\log_3(x-3)^3+\log_{3(x-3)}3=1$.
5. Найдите объем фигуры, полученной вращением вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной отрезком оси ординат, дугой параболы $y=-x^2+4x+5$ при $x\in[2;\,5]$ и боковыми сторонами, являющимися отрезками прямых, параллельных оси абсцисс.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{3+\operatorname{tg}^2 x+\cos^2 x}+2\left(\cos\dfrac{x}{2}+\sqrt{2}\sin y\right)^2=2, \\ 4\sin y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{x}{2}-\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin y\right)=1+\cos x-\sin x. \end{cases}$
2. Вокруг равнобедренной трапеции описана окружность, причем угловые величины дуг, стягиваемых основаниями и не проходящих через все вершины трапеции, равны 2 и 4радиан. Найдите наибольшую сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин трапеции.
3. Решите неравенство $x^2\le(3x-2)(-1+\sqrt{x+1})^2$.
4. Решите уравнение $\log_x 2+\log_{x^2}2+2\log_{2x}2=1$.
5. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной дугой параболы $y=-x^2+6x-5$ при $x\in[1;\,2]$, осью ординат и соответствующими отрезками прямых, параллельных оси абсцисс.

Вариант 3

1. Лифт с начала движения опустился на 32 м. Сперва он двигался равноускоренно с ускорением $4\ \text{м}/\text{с}^2$, а затем, когда его скорость достигла величины $a\ \text{м}/\text{с}^2$, продолжал двигаться равномерно с этой скоростью. Найдите *a*, если известно, что на первые 16 метров он затратил времени в полтора раза больше, чем на вторые.
2. В круге две хорды *AB* и *CD* пересекаются под прямым углом в точке *P*, причем *AB* стягивает дугу в $90°$, а *CD* — дугу в $150°$. Найдите радиус круга, если длина *CP* (*CP* — меньшая часть хорды *CD*) равна *a*.
3. Изобразите на графике множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|x^2 - y^2| = x - y$.
4. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, у которой третий и седьмой члены удовлетворяют уравнению $x^2 - 12x - 28 = 0$.
5. В правильной треугольной призме проведены диагонали двух боковых граней, причем эти диагонали не исходят из одной вершины. Найдите отношение высоты призмы к стороне равностороннего треугольника, лежащего в основании призмы, если известно, что угол между проведенными диагоналями прямой.

Вариант 4

1. Самолет совершает посадку и двигается по земле в течение некоторого времени со скоростью $a\ \text{м}/\text{с}$. Затем после включения тормозного устройства движение самолета становится равнозамедленным с ускорением $-2\ \text{м}/\text{с}^2$. Путь от места приземления до полной остановки равен 4050 м. Найдите *a*, если известно, что на первую половину пути было затрачено в два раза меньше времени, чем на вторую.
2. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AB* угол *C* при вершине равен $30°$. На стороне *AC* откладывается отрезок *CK*, по длине равный *AB*. Найдите угол *CBK*.
3. Изобразите на графике множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x + y)^2 = |x + y|$.
4. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, у которой третий и пятый члены удовлетворяют уравнению $x^2 - 10x - 11 = 0$.
5. Вершинами многогранника являются центры граней некоторого прямоугольного параллелепипеда. Найдите отношение объема этого многогранника к объему параллелепипеда.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1981 год
химический факультет

Вариант 1

1. После переплавки двух сплавов железа и никеля, первый из которых весил 50 кг и содержал 70% никеля, получен сплав весом 80 кг, содержащий 60% никеля. Каково содержание никеля во втором сплаве?
2. Дан круг и точка P вне его. Найдите геометрическое место середин хорд, представляющих из себя сечения круга прямыми, проходящими через точку P.
3. Решите уравнение $4(\cos 2x + \sin 2x) = 7(\cos x + (1+\sqrt{2})\sin x)$.
4. Решите неравенство $\sqrt{x+\frac{1}{4}} > 2x - \frac{1}{2}$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, осью абсцисс и графиком функции $y = \left| \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right|$.

Вариант 2

1. Два полных сосуда, содержащих 75%-ный и 45%-ный растворы серной кислоты, смешаны, в результате чего получено 60 литров 70%-ного раствора кислоты. Каковы объемы сосудов?
2. Дана окружность с радиусом r и центром в точке O и другая окружность внутри нее радиусом $\frac{1}{4}r$ и касающаяся первой в точке A. Через середину B отрезка OA проводится прямая, касательная ко второй окружности, до пересечения с первой в точке C. Найдите расстояние от точки B до прямой, проходящей через точки A и C.
3. Решите уравнение $3\cos 2x + 6\sin x \cos x = 11(\cos x + (1-\sqrt{2})\sin x)$.
4. Решите неравенство $\sqrt{2x+\frac{1}{2}} > 2x - \frac{3}{2}$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \pi$, осью абсцисс и графиком функции $y = \left| \cos x - \frac{1}{2} \right|$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1981 год
географический факультет,
геологический факультет,
филологический факультет
(специальность «математическая лингвистика»)

Вариант 1

1. Решите неравенство $2^x - 2 < \sqrt{3 \cdot 2^{x+1} - 5}$.
2. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}(|2x+3|-3)(x-2)$.
3. Упростите выражение $\sin\alpha\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)-\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.
4. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин треугольника не зависит от выбора точки.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $y = \frac{x}{\ln 2} + 1$ и кривой $y = e^x$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\log_3 x - 3 < \sqrt{\log_3 x + 27}$.
2. Постройте график функции $y = \frac{1}{4}(|x+2|+2)(2x-5)$.
3. Упростите выражение
$$\sin\alpha\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$
4. Вокруг квадрата описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $y = \frac{e^{-6}-1}{3}x + 1$ и кривой $y = e^{-2x}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1981 год

экономический факультет
(кроме специальности «политэкономия»),
факультет психологии

Вариант 1

1. Бригада из 10 человек убирает два картофельных поля. После того, как убрали первое поле, несколько человек перевели на другую работу, а оставшиеся убрали треть второго поля, после чего ушедшие люди вернулись и привели с собой еще столько рабочих, и все вместе закончили работу. При каком количестве выбывших после уборки первого поля работа будет закончена в кратчайший срок?
2. При каких значениях параметра a уравнение $a = \frac{1}{5}$ имеет на промежутке $[0; 2\pi]$ ровно три решения?
3. Решите уравнение $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2$.
4. Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r, длина стороны BC равна a, а радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равен R. Найдите площадь треугольника ABC.
5. При каком значении параметра a $(0 < a < 1)$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ и прямыми $x = a^5$, $x = a^4$, $y = 0$, будет наибольшей?

Вариант 2

1. Пятнадцать насосов одинаковой мощности наполняет последовательно три бассейна. Перед наполнением a насосов были отключены, но после того, как второй бассейн был наполнен, указанные a насосов вновь были включены и дополнительно были включены еще $2a$ насосов. При каком a бассейны будут наполнены в кратчайший срок, если известно, что третий бассейн вдвое больше второго?
2. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{2 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = a$ имеет на промежутке $[0; 2\pi]$ ровно один корень?
3. Решите уравнение $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \sin x \cos x$.
4. В треугольнике ABC, площадь которого равна S, из точек A и B проведены медианы, образующие между собой угол α, опирающийся на AB. Найдите длину одной из них, если длина другой равна l.
5. При каком значении параметра a $(0 \le a \le 1)$ площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = \sqrt{a}$, будет наибольшей?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1981 год
биолого-почвенный факультет

Вариант 1

1. Два стрелка из лука стреляют по мишени каждый по 56 раз, причем вместе они сделали 22 промаха. Сколько раз каждый из них поразил мишень, если известно, что отношение числа попаданий к числу промахов у первого стрелка вдвое больше, чем у второго?
2. Постройте график функции $y = 2\sin^2\left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right|$.
3. Найдите меньший острый угол прямоугольного треугольника, разность длин катетов которого равна биссектрисе прямого угла.
4. а) Решите уравнение $s = a$, где $s = x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$ (биологический факультет).
   б) Решите уравнение $s = 1$, где $s = x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$ (факультет почвоведения).
5. а) Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси ординат фигуры, образованной положительными полуосями координат и другой параболы $y = x - \frac{1}{2}x^2 + 4$ (биологический факультет).
   б) Найдите векторы единичной длины, коллинеарные вектору, касательному к кривой $y = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ в точке $x = 6$ (факультет почвоведения).

Вариант 2

1. В двух коробках находится по 20 карандашей, из них 26 простых, остальные цветные. Сколько карандашей содержится в каждой коробке, если известно, что отношение числа простых карандашей к числу цветных в первой коробке в 4 раза больше, чем во второй?
2. Постройте график функции $y = -\dfrac{2\,\mathrm{tg}^2\left|\frac{x}{2}\right|}{1 + \mathrm{tg}^2\left|\frac{x}{2}\right|}$.
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA' и BB' углов A и B соответственно. Вокруг четырехугольника $OA'CB'$ (O — центр вписанного круга) можно описать окружность. Найдите радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности, если радиус вписанной окружности равен r и угол A равен $30°$.
4. а) Решите уравнение $s = a$, где $s = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots$ (биологический факультет).
   б) Решите уравнение $s = a$, где $a \in [-2; -1]$ и $s = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots$ (факультет почвоведения).
5. а) Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси ординат фигуры, образованной в правой полуплоскости осями координат и другой параболы $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ (биологический факультет).
   б) Найдите векторы единичной длины, коллинеарные вектору, касательному к кривой $y = x\sqrt{6-x}$ в точке $x = 4$ (факультет почвоведения).

Санкт-Петербургский государственный университет, 1981 год
экономический факультет
(специальность «политэкономия»)

Вариант 1

1. На сколько процентов увеличится покупательная способность населения (т.е. количество однородных товаров, которое можно приобрести на данную сумму денег), если цены на все товары снизить на 20%?
2. Изобразите на графике множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y^2(1-\cos 2x) = x^2 \sin^2 x$.
3. Решите уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$.
4. В сектор круга с радиусом 15 см вписана окружность с радиусом r см. Хорда сектора имеет длину 20 см. Найдите r.
5. Исследуйте функцию $y = \dfrac{x}{\sqrt{2x-3}}$.

Вариант 2

1. При перевозке зерна на элеватор используются грузовики одинаковой грузоподъемности. На сколько процентов уменьшится время, за которое будет перевезено все зерно, если грузоподъемность грузовиков увеличить на 25%?
2. Изобразите на графике множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(1+\cos 2y)(x^2+y^2) = 4|xy|\cos^2 y$.
3. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$.
4. Две хорды пересекаются под прямым углом, деля окружность на четыре дуги. Докажите, что сумма двух не примыкающих друг к другу дуг равна $180°$.
5. Исследуйте функцию $y = x\sqrt{2x+3}$.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $(-1;\ \mathrm{tg}1-1)$.
2. Ответ: углы должны быть равными.
3. Ответ: $\dfrac{370}{2197}$.
4. Ответ: $\left(-\infty;\ -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(0;\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup (2;\ +\infty)$.
5. Ответ: $V = 24\sqrt{2}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{e}\right)$.
2. Ответ: при $0 < \widehat{CBA} \le \dfrac{\pi}{3}$: $\widehat{PBA} = \widehat{CBA}$, при $\widehat{CBA} > \dfrac{\pi}{3}$: $\widehat{PBA} = \dfrac{\pi - \widehat{CBA}}{2}$.
3. Ответ: $-\dfrac{13\sqrt{7}}{15}$.
4. Ответ: $(-1;\ 0) \cup \left(0;\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(1;\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.
5. Ответ: $V = \dfrac{125\pi}{6}$.

Ответы к варианту 3

1. Ответ: $\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\right)^3$.
2. Ответ: на серединах дуг окружности *AB*, *BC*, *AC*, где *A*, *B* и *C* — вершины треугольника.
3. Ответ: при *n* равных 2, 3, 4.
4. Ответ: $\left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{11}{9}\right)$.
5. Ответ: на одинаковом расстоянии от точки пересечения.

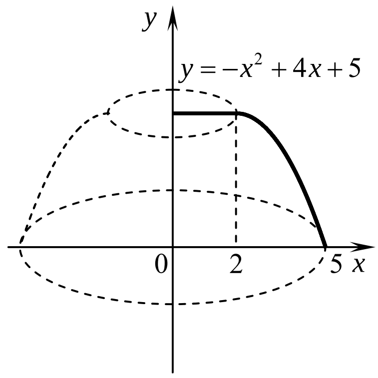
Ответы к варианту 4

1. Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{7}{4}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$.
2. Ответ: на серединах дуг окружности *AB*, *BC*, *AC*, где *A*, *B* и *C* — вершины треугольника.
3. Ответ: при *n* равном 2.
4. Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{8-2\sqrt{37}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{8+2\sqrt{37}}{3}; +\infty\right)$.
5. Ответ: прямая перпендикулярна плоскости.

Физический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi n\right): k,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $2R^2(3+|1+2\cos 2\alpha|)$.
3. Ответ: $\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right)\cup\{-1\}$.
4. Ответ: $\left\{3+\frac{\sqrt[4]{3}}{3};\ 4\right\}$.
5. Ответ: $\frac{297\pi}{2}$.

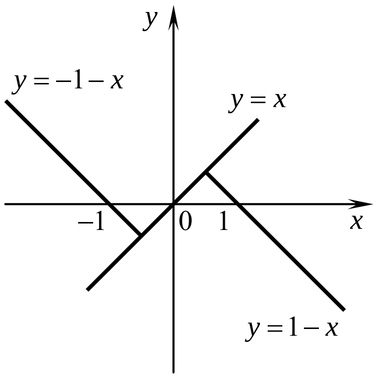


Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{(\pi(2k+1);\ \pi n): k,\ n\in\mathbb{Z}\}$.
2. Ответ: $4R^2(2+\cos 1-\cos 2)$.
3. Ответ: $\left[\frac{5+\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right)\cup\{0\}$.
4. Ответ: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ 8\right\}$.
5. Ответ: $\frac{13\pi}{2}$.

Ответы к варианту 3

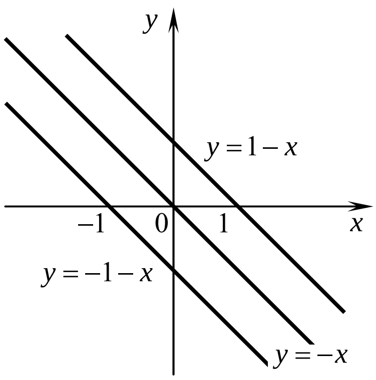
1. Ответ: $a = 8$ м/с, или $a = \frac{8}{3}\sqrt{2}(5+\sqrt{7})$ м/с.
2. Ответ: $r = (\sqrt{2}+\sqrt{6})a$.
3. Ответ: см. рисунок.



4. Ответ: $a_1 = -2$, $d = 0$; $a_1 = 14$, $d = 0$; $a_1 = -10$, $d = 4$; $a_1 = 22$, $d = -4$.
5. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответы к варианту 4

1. Ответ: $a = 90$ м/с, или $a = 180$ м/с.
2. Ответ: $\widehat{CBK} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}$.
3. Ответ: см. рисунок.

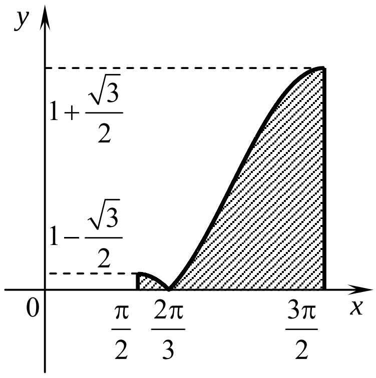


4. Ответ: $a_1 = -13$, $d = 6$; $a_1 = 23$, $d = 23$; $a_1 = -1$, $d = 0$; $a_1 = -1$, $d = 0$.
5. Ответ: $\frac{1}{6}$.

Химический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\frac{130}{3}\%$.
2. Ответ: дуга окружности с диаметром OP, лежащая внутри данного круга.
3. Ответ: $\{\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2})+\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$.
4. Ответ: $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$.
5. Ответ: $1+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.



Ответы к варианту 2

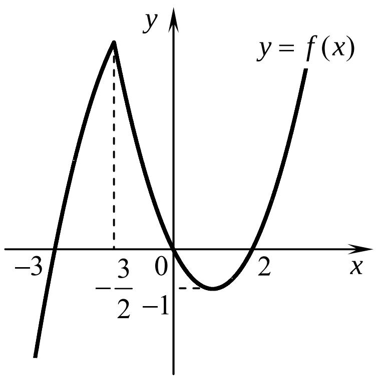
1. Ответ: 50 л, 10 л.
2. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}r$.
3. Ответ: $\{\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})+\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$.
4. Ответ: $\left[-\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$.
5. Ответ: $\frac{\pi}{4}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}$.

Географический факультет,
геологический факультет,
филологический факультет
(специальность «математическая лингвистика»)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left[\log_2 \frac{5}{6}; \log_2 9\right)$.

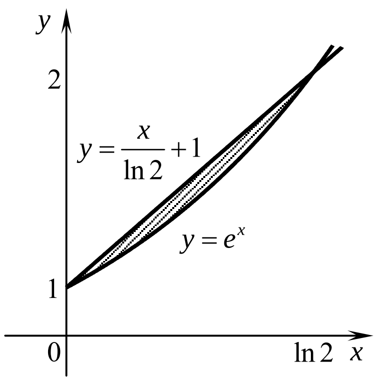
2. Ответ: $f(x) = \begin{cases} -(x+3)(x-2), \ x \le -\frac{3}{2}, \\ x(x-2), \ x \ge -\frac{3}{2}. \end{cases}$



3. Ответ: $\frac{3}{4}$.

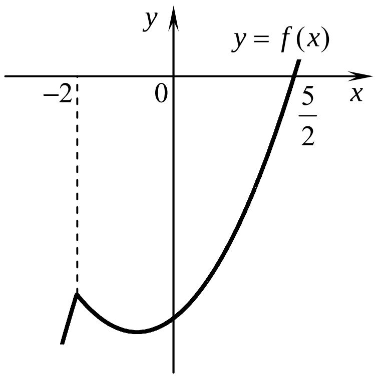
4. Ответ: .

5. Ответ: $\frac{3}{2}\ln 2 - 1$.



Ответы к варианту 2

1. Ответ: $[3^{-27}; 3^{9})$.
2. Ответ: $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4}x(2x-5), \ x\le -2, \\ \dfrac{1}{4}(x+4)(2x-5), \ x\ge -2. \end{cases}$.



3. Ответ: $\sqrt{2}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $2e^{-6}+1$.

Экономический факультет
(кроме специальности «политэкономия»),
факультет психологии

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 2 человека.
2. Ответ: $a = \frac{1}{5}$.
3. Ответ: $\left\{ -\arccos\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{5})}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \arccos\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{5})}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $S = \frac{r \cdot R}{R - r} a$.
5. Ответ: $a = \frac{16}{25}$.

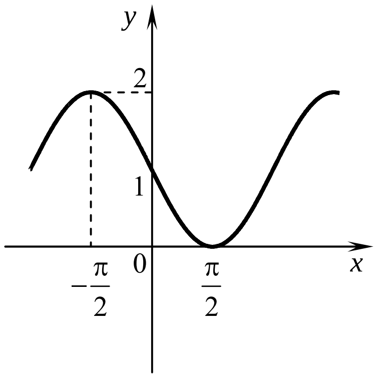
Ответы к варианту 2

1. Ответ: $a = 4$.
2. Ответ: $a = \frac{1}{2}$.
3. Ответ: $\left\{ -\arccos\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{5})}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \arccos\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{5})}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $\frac{3}{2} \cdot \frac{S}{l \sin\alpha}$.
5. Ответ: $a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Биолого-почвенный факультет

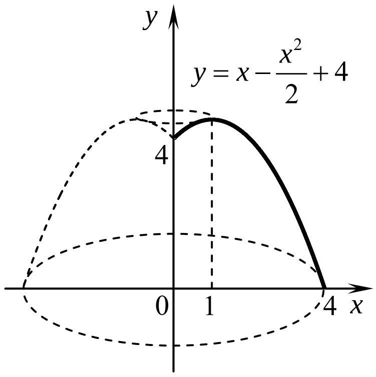
Ответы к варианту 1

1. Ответ: 48 и 42.
2. Ответ: после преобразования получим, что $y = 2\sin^2\left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right| \Leftrightarrow y = 1 - \sin x$.



3. Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.
4. а) Ответ: при $0 \le a < \frac{1}{2}$: $\left\{\frac{a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2}; \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}\right\}$, при $a \ge \frac{1}{2}$: $\left\{\frac{a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2}\right\}$, при $a < 0$: $\varnothing$.

   б) Ответ: $\left\{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$.
5. а) Ответ: $\frac{128}{3}\pi$.



   б) Ответ: $(1; 0)$ и $(-1; 0)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 16 и 10.
2. Ответ: после преобразования получим, что $y=-\dfrac{2\operatorname{tg}^2\left|\frac{x}{2}\right|}{1+\operatorname{tg}^2\left|\frac{x}{2}\right|} \Leftrightarrow y=\cos x-1$, $x\neq(2k+1)\pi : k\in\mathbb{Z}$.
3. Ответ: $(1+\sqrt{3})r$.
4. а) Ответ: при $a>-1$: $\left\{\dfrac{2a}{a+2}\right\}$, при всех остальных a — решений нет.

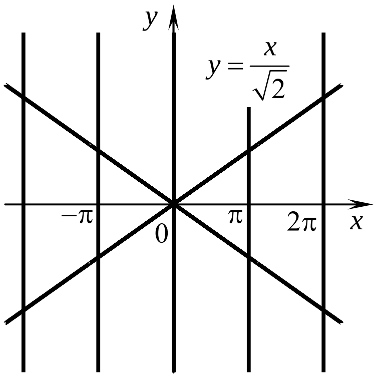
   б) Ответ: уравнение решений не имеет.
5. а) Ответ: $\dfrac{45}{4}\pi$.

   б) Ответ: $(1;\,0)$ и $(-1;\,0)$.

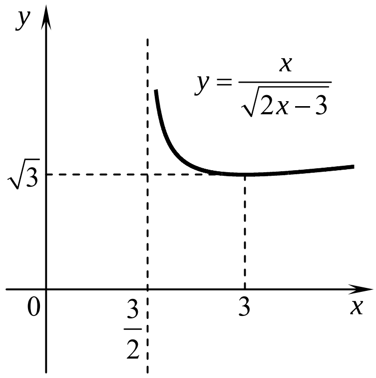
Экономический факультет
(специальность «политэкономия»)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: на 25%
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ: $\left\{\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $r=6$ см.
5. Ответ: см. рисунок.



Ответы к варианту 2

1. Ответ: на 20%
2. Ответ: прямые $y=\pm x$, $y=\frac{\pi}{2}(2k+1) : k\in\mathbb{Z}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: .