

Санкт-Петербургский государственный университет, 1983 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. Даны правильный тетраэдр и шар, площади поверхностей которых относятся как $S:1$. Можно ли шар поместить в тетраэдр, если: а) $S = 2\sqrt{3}$; б) $S = 3$.
2. Решите уравнение $\operatorname{tg} 7x = \sin 4x + \operatorname{tg} 3x$.
3. Биссектриса прямого угла α равнобокой трапеции делит большую сторону длины a в отношении $1:2$. Чему равна площадь трапеции?
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 8\sqrt{\frac{1}{4}(3\log_8 x + \log_5(y+1)^3)} - 7\sqrt{\frac{1}{4}(3\log_8 x^3 + 3\log_5(y+1))} = 1, \\ 11\sqrt[4]{\log_8 x^3 \cdot \log_5(y+1)} - 5\sqrt[5]{\log_8 x \cdot \log_5(y+1)^3} = 6. \end{cases}$$
5. Найдите все a , для которых любое решение неравенства $|1+a|x - ax^2 \geq \frac{9}{16} \left| \frac{7a}{16} + 1 \right| - \frac{1}{8}$ удовлетворяет также неравенству $1 - \operatorname{tg}^2(ax) < -\frac{1}{\cos(ax)}$.

Вариант 2

1. Даны шар и правильный тетраэдр, площади поверхностей которых относятся как $S:1$. Можно ли тетраэдр поместить в шар, если: а) $S = \frac{3}{2}\sqrt{3}$; б) $S = 3$.
2. Решите уравнение $\operatorname{tg} 9x + \frac{1}{\operatorname{tg} 4x} = \cos 5x$.
3. В равнобокой трапеции перпендикуляр, опущенный из вершины угла α на большую сторону длины a , делит эту сторону в отношении $1:3$. Чему равна площадь трапеции?
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 7\sqrt[4]{2^{x+2} \cdot 5^{y-1}} - 4\sqrt[7]{4 \cdot 5^{y-1} \cdot 2^x} = 3, \\ 9\sqrt{\frac{1}{5}(2^{x+2} + 4 \cdot 5^{y-1})} - 8\sqrt[5]{4 \left(5^{y-2} + \frac{1}{5} \cdot 2^x \right)} = 1. \end{cases}$$
5. Найдите все a , для которых любое решение неравенства $ax^2 + \frac{1}{8} \left| a + \frac{3}{2} \right| + \frac{7a}{24} \leq a \left| 1 + \frac{1}{2a} \right| x$ удовлетворяет также неравенству $4 + \frac{\cos^2(2ax)}{\sin^4(ax)} < \frac{1}{\sin(ax)} \left(4 + \frac{1}{\sin^3(ax)} \right)$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1983 год
физический факультет

Вариант 1

1. Из пункта A в пункт B , расположенный выше по реке, выплывает лодка и одновременно из B в A — катер. Катер доплывает до B , разворачивается и плывет в A , затем опять разворачивается и т.д. Скорости катера и лодок в стоячей воде равны v и $\frac{14v}{109}$ соответственно. Когда лодка преодолела половину расстояния между A и B , навстречу ей из A в B выплыла вторая лодка. Определите скорость течения реки, если в тот момент, когда вторая лодка прошла половину пути, катер в восьмой раз приплыл в B .
2. Угол α — острый, а β — тупой, причем $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{tg}^2 \beta = 51 - 10\sqrt{26}$. Докажите, что $\alpha + 2\beta = \frac{9\pi}{4}$.
3. Изобразите на плоскости множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $a^{y+3|x|} < 1 + 2a^{-y-3x}$, где a — положительное число.
4. Решите уравнение $\frac{6}{7}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y} + 4\cos^2 \frac{y}{2} = 5$.
5. Стенки и дно колодца, имеющего глубину H , укрепили слоем бетона толщиной h . Исходное сечение колодца — равносторонний треугольник со стороной a . Найдите объем израсходованного бетона.

Вариант 2

1. Из пункта A в пункт B вылетают одновременно вертолет и самолет. Самолет летит из B в A , разворачивается и летит в A , затем опять разворачивается и т.д. Когда вертолет пролетел половину расстояния от A до B , из B в A вылетел другой вертолет. Скорости самолета и вертолетов равны v и $\frac{27v}{391}$ соответственно. Найдите скорость ветра, дующего из A в B , если известно, что в тот момент, когда второй вертолет преодолел половину пути, самолет пролетел расстояние в 14,5 раза больше, чем расстояние между A и B .
2. Угол α — тупой, а β — острый, причем $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{49}{529}$. Докажите, что $2\alpha - \beta = \frac{7\pi}{4}$.
3. Изобразите на плоскости множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\log_a(2a^2|x| + a^2y) \cdot \log_a\left(2\frac{|x|}{a^2} + \frac{y}{a^2}\right) < 3\log_a(2|x| + y)$, где a — положительное число, $a \neq 1$.
4. Решите уравнение $\frac{2}{7}\sqrt{1 + (\operatorname{tg} z)^{-2}} - \frac{\cos z - 1}{\operatorname{tg} \frac{z}{2}} = \frac{4}{3}$.
5. Резервуар для хранения нефти имеет вид прямой призмы высотой H , основанием которой служит правильный шестиугольник со стороной a . Толщина стенок, днища и крышки равна h . Найдите вместимость резервуара.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1983 год

экономический факультет
(отделение экономической кибернетики),
филологический факультет
(отделение математической лингвистики),
психологический факультет

Вариант 1

1. Из города M в город L выехала машина, а через t часов выехала машина из L в M . Их встреча произошла через T часов. Найдите время пробега каждой машины, если их скорости постоянны, а прибыли они в пункты назначения одновременно.
2. Решите уравнение $\frac{4}{25^{-x} + 8 + 16 \cdot 25^x} - \frac{5^x}{1 + 4 \cdot 25^x} + \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{23}}{5} + \frac{1}{100}$.
3. В меньшую из концентрических окружностей радиусов 1 и 2 вписан равносторонний треугольник. Найдите площади фигур, на которые разбивается больший круг прямыми, содержащими стороны треугольника.
4. Решите неравенство $(32 \sin^8 x)^{-2} + 4 \sin^6 x \leq 1 - \sin^4 x$.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \log_{|y|} x^2 + \log_{x^2} |y| = 2, \\ x^4 + yx^2 = 10 + y. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Из двух наполненных одинаковым количеством воды баков насосами откачивают воду. Второй насос включается на 3 часа позже первого. К моменту, когда второй бак стал пуст, в первом оставалось четверть первоначального объема, а за 4 часа до этого насосы работали и количество воды в резервуарах были одинаковым. За какое время опустошается каждый бак, если насосы работают равномерно?
2. Решите уравнение $\frac{6}{9^{-x} + 81 \cdot 9^x + 18} - \frac{3^x}{1 + 9 \cdot 9^x} + \frac{\sqrt{26}}{5} + \frac{1}{100} = \frac{\sqrt{17}}{4}$.
3. В меньшую из концентрических окружностей радиусов 1 и 2 вписан квадрат. Найдите площади фигур, на которые разбивается больший круг прямыми, содержащими стороны квадрата.
4. Решите неравенство $\frac{1}{16 \cos^4 x} + \frac{1}{8 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \cos^2 x > 1 - \cos^4 x$.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 1 + 2^{2|x| - y^2} = 2^{1 + y^2 - 2|x|}, \\ y^4 - 2xy^2 + 2x = 3. \end{cases}$$

Санкт-Петербургский государственный университет, 1983 год
биолого-почвенный факультет

Вариант 1

1. Две гончие бегут из пункта A в пункт B . Через t минут сумма расстояний, преодоленных ими, равнялась расстоянию между A и B . Скорость v_1 первой гончей больше и поэтому она прибежала в B на T минут раньше второй. Найдите отношение $\frac{v_1}{v_2}$ скоростей гончих.
2. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{a^2 - 1}{(a + 3)^2} \cos \frac{3x}{2} + (a^3 + a^2 - 4a - 4) \frac{x^2 + a - 5}{x^2 - 2a + 1}$ является периодической и имеет наименьший положительный период $\frac{4\pi}{3}$?
3. а) Решите уравнение $4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos(2^{n+1}x) = 2^{-n}$ (специальность «биология»).
б) Апельсин имеет форму шара радиуса R . После того, как с него срезали корку, он сохранил форму шара, но площадь его поверхности уменьшилась в k раз. Найдите толщину корки апельсина и ее объем (специальность «почвоведение»).
4. В треугольнике ABC точки M , N и P расположены на сторонах AB , BC и AC соответственно. Известно, что $\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{1}{3}$, $\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{2}{3}$, $\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{4}{1}$, а площадь треугольника ABC равна S . Найдите площадь треугольника MNP .
5. Решите уравнение $1 - A(x) + A^2(x) + \dots + (-1)^n A^n(x) + \dots = (3 \cdot 2^x - 1)^{-1}$, где $A(x) = 4^x + 2^{x-1} - 1$.

Вариант 2

1. Две рыбы, скорости которых в стоячей воде равны $2v$ и v , плывут навстречу друг другу. Через t минут они встречаются, разворачиваются и плывут в пункты отправления. Известно, что первая рыба сначала плыла против течения и вернулась на $2t$ минут позже второй. Найдите скорость течения реки.
2. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \sin \frac{5x}{2} + (a^3 - a^2 - 9a + 9) \frac{x^2 + a + 1}{x^2 + 3a + 5}$ является периодической и имеет наименьший положительный период $\frac{4\pi}{5}$?
3. а) Решите уравнение $4 \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \dots \cdot \cos(2^{-n-1}x) = 2^{-n}$ (специальность «биология»).
б) Морковь имеет форму прямого кругового конуса. Его высота равна h , а радиус основания r . После очистки моркови радиус основания уменьшился в k раз, а объем — в S раз. Во сколько раз уменьшилась площадь полной поверхности (специальность «почвоведение»)?
4. В треугольнике ABC , площадь которого равна S , длины сторон AB и AC относятся как 1:5. Средняя линия, параллельная BC , пересекает медиану и биссектрису, проведенные из точки A , в точках M и N . Найдите площадь треугольника AMN .
5. Решите уравнение $1 + B(x) + B^2(x) + \dots + B^n(x) + \dots = (4 \cdot 3^{x-1} + 1)^{-1}$, где $B(x) = 2 \cdot 3^x - 9^x - 1$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1983 год
химический факультет

Вариант 1

1. В двух колбах находятся водные растворы некоторого вещества. Концентрации растворов разные, а объемы — одинаковые. Из второй колбы в первую отливают половину содержимого, а затем во вторую доливают воду так, чтобы объемы растворов в колбах опять сравнялись. Постом ту же процедуру проделывают с первой колбой. Определите первоначальные концентрации, если в результате в первой колбе оказался 25%-ный раствор, а во второй — 40%-ный раствор.
2. Решите уравнение $|\dots||x+1|+2|+\dots+n|=\frac{n(n+2)}{2}$.
3. Решите уравнение $2\cos^2(x^2+2\sqrt{\pi}x)+3\cos(x+\sqrt{\pi})^2=2$.
4. В прямоугольном треугольнике расстояние между двумя точками пересечения гипотенузы длиной h с медианой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равно d . Найдите длины катетов.
5. Решите неравенство $a(2a+1)(x^2-2x-2)<3(x-1)^2-9$, где a — вещественное число.

Вариант 2

1. В двух колбах находится разное количество 75%-ного водного раствора некоторого вещества. Сначала во вторую колбу доливают воду в количестве, равном содержимому первой колбы. Затем половину полученного раствора переливают в первую колбу, а во вторую колбу добавляют столько воды, сколько раствора было отлито. Найдите количество раствора в каждой из колб, если в результате в первой колбе оказалось на $\frac{1}{4}$ литра раствора меньше, а концентрация раствора во второй колбе стала равной 25%.
2. Решите уравнение $\left|\dots\left|\left|\frac{x}{2}+2\right|+4\right|+\dots+2n\right|=n(n+3)$.
3. Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{\pi}x\right)+2=5\sin\frac{(x+\sqrt{\pi})^2}{2}$.
4. В прямоугольном треугольнике расстояние между точками пересечения гипотенузы длиной h с высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла, равно d . Найдите длины катетов.
5. Решите неравенство $b(3b-5)(y^2-4y+1)<2(y-2)^2-6$, где b — вещественное число.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1983 год

геологический факультет,
географический факультет,
экономический факультет (отделение ЭИР)

Вариант 1

1. Решите уравнение $\frac{1}{2} \log_2 (x-3)^2 - \log_2 (2-x) = 1$.
2. У подножия горы, имеющей в сечении вид прямоугольного треугольника, расположены пункты A и B . Из A в B ведут две дороги: одна — через тоннель (по гипотенузе), вторая — через гору (по катетам). Пешеходы X и Y отправляются из A в B по этим дорогам. Скорость Y при подъеме в k раз меньше его скорости при спуске. Через T часов Y находился на вершине, а еще через t часов пешеходы встретились в B . Найдите отношение скорости X к скорости Y при спуске.
3. а) В трапеции один из углов прямой, биссектриса острого угла является диагональю. Высота трапеции равна h , а меньшее основание — a ($a \geq h$). Найдите периметр трапеции (кроме географического факультета).
б) В трапеции один из углов прямой, а биссектриса острого угла является диагональю. Высота трапеции равна h , а средняя линия — m ($m \geq h$). Найдите периметр трапеции (географический факультет).
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4 \cos^2 \frac{x}{2} - \sqrt{-\cos 2y} = 3, \\ x + 2y = 5\pi. \end{cases}$$
5. Решите неравенство $\frac{x^6 - x^4 + 2}{(x^2 - 8x + 15)^2 (x^2 - 4x + 1)} < 0$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{1}{2} \log_4 (x+1)^2 - \log_4 (2-x) = \frac{1}{2}$.
2. Сечение рва имеет форму прямоугольного треугольника. Пешеход X идет по мосту (гипотенузе), а пешеход Y переходит ров, спускаясь вниз (т.е. по катетам). Скорость Y при спуске в k раз больше скорости при подъеме. Через t минут Y находился в самой нижней точке, а X — посередине моста. Еще через T минут Y преодолел ров. Найдите отношение скорости X к скорости Y при подъеме.
3. а) В равнобокой трапеции биссектриса тупого угла делит основание пополам. Высота трапеции равна h , а большее основание — b ($b \geq 2h$). Найдите периметр трапеции (кроме географического факультета).
б) В равнобокой трапеции биссектриса тупого угла делит основание пополам. Высота трапеции равна h , а средняя линия — m ($m \geq 2h$). Найдите периметр трапеции (географический факультет).
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x - 2y = 7\pi, \\ 1 + \sqrt{-\sin 2y} + \frac{4 \cos^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{4}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}. \end{cases}$$
5. Решите неравенство $\frac{2x^8 - x^2 + 1}{(x^2 + x - 12)^2 (x^2 - 2x - 4)} < 0$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1983 год
экономический факультет
(специальность «политэкономия»)

Вариант 1

1. Две машинистки X и Y печатают два одинаковых текста. Скорости печатания 170 и 204 знака в минуту соответственно. Через t минут Y закончила работу и оказалось, что X и Y вместе напечатали 11220 знаков. Найдите t и время, необходимое X для завершения работы.
2. Решите уравнение $3\cos\alpha = \sqrt{6} - \sqrt{3}\sin\alpha$.
3. Дан квадрат площади S . На каждой его стороне построен равносторонний треугольник, имеющий с квадратом две общие вершины. Известно, что квадрат и каждый треугольник находятся по одну сторону от прямой, соединяющей их общие вершины. Докажите, что через вершины этих треугольников, не являющихся вершинами квадрата, можно построить единственную окружность, и найти ее длину.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2^{xy} + 2^x = 10, \\ 2^{x(y+1)} - 2^{xy} - 8 = 0. \end{cases}$$
5. Решите уравнение $\sqrt{4x(x+1)+1} + \sqrt{4x(x-1)+1} = 2$.

Вариант 2

1. В цехе на конвейере работают несколько бригад по двое человек в каждой. После модернизации оборудования производительность каждого рабочего увеличилась на 286 деталей. Определите количество бригад и производительность рабочих до модернизации оборудования, если продукция цеха увеличилась в $\frac{24}{13}$ раза или на 22022 детали.
2. Решите уравнение $3\sin\beta + \sqrt{6} = \sqrt{3}\cos\beta$.
3. Дан квадрат периметра P . На каждой его стороне построен равносторонний треугольник, имеющий с квадратом две общие вершины. Известно, что квадрат и каждый треугольник находятся по разные стороны от прямой, соединяющей их общие вершины. Докажите, что через вершины этих треугольников, не являющихся вершинами квадрата, можно провести единственную окружность, и найти площадь круга.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3^y + 3^{xy} = 12, \\ 3^{y(x+1)} - 2 \cdot 3^{xy} - 9 = 0. \end{cases}$$
5. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 4(x+1)} + \sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 4$.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: а) да; б) нет.
2. Ответ: $\left\{ \pi k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$.
3. Ответ: при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$: $S = \frac{a^3}{3}(1 - \cos \alpha) \sin \alpha$ или $S = \frac{a^3}{3}(2 + \cos \alpha) \sin \alpha$; при $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right)$:
 $S = \frac{a^2}{9}(3 + \cos \alpha) \sin \alpha$ или $S = \frac{2a^2}{9}(3 + 2 \cos \alpha) \sin \alpha$.
4. Ответ: $\{(8; \sqrt[3]{5} - 1); (2; 4)\}$.
5. Ответ: $\left(\frac{8\pi}{7}; \frac{16}{9}(\pi - 1) \right)$.

Ответы к варианту 2

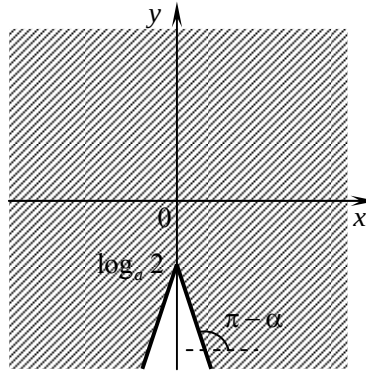
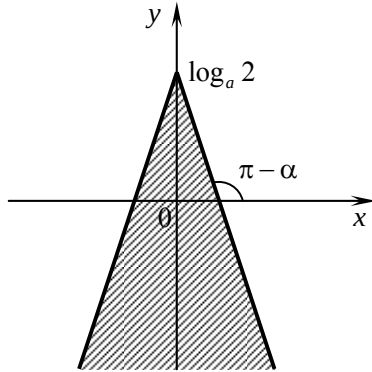
1. Ответ: а) нет; б) да.
2. Ответ: $\left\{ \pi k + \frac{\pi}{10}(5 + 2n) : k = 1, 2, 3, 4; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$.
3. Ответ: при $\alpha \in \left(\pi - \arccos \frac{1}{4}; \pi \right]$: $S = -\frac{3a^2}{16} \operatorname{tg} \alpha$; при $\alpha \in \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}; \arccos \frac{1}{4} \right]$:
 $S = \frac{a^2}{4}(1 - 4 \cos^2 \alpha) \operatorname{tg} \alpha$, при остальных значениях α указанная ситуация невозможна.
4. Ответ: $\{(0; 1 - \log_5 4); (-2; 1)\}$.
5. Ответ: $\left(0; \frac{4}{5}(\pi - 1) \right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}; \frac{8}{5} \left(\pi - \frac{1}{2} \right) \right)$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $v \left(7 \cdot \frac{223}{209} - \sqrt{\left(7 \cdot \frac{223}{209} \right)^2 - \frac{14}{209}} \right).$

2. Ответ: .

3. Ответ: при $a=1$: множество решений — вся плоскость; при $a>1$: множество изображено на рис.1 ($\alpha = \operatorname{tg} 3$); при $a \in (0; 1)$: множество изображено на рис.2 ($\alpha = \operatorname{tg} 3$) (границы областей не принадлежат множеству).



4. Ответ: $\left\{ \pm \arccos \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{7}} \right) + 2\pi k; \pm \arccos \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{111}{7}} \right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}.$

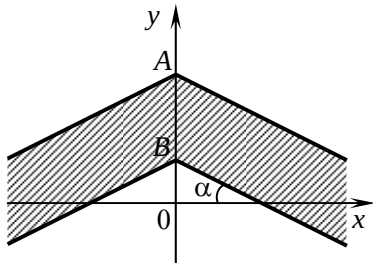
5. Ответ: $V = ha \left(3H + \frac{\sqrt{3}}{4} a \right) - 3h^2 (\sqrt{3}H + a) + 3\sqrt{3}h^3.$

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $v \left(27 \cdot \frac{209}{391} - \sqrt{\left(27 \cdot \frac{209}{391} \right)^2 - \frac{27}{391}} \right).$

2. Ответ: .

3. Ответ: при $a>1$: $A=a^4$, $B=a^{-1}$; при $a \in (0; 1)$: $A=a^{-1}$, $B=a^4$ ($\alpha = 2^{-1}$) (граница области не принадлежит множеству решений).



4. Ответ: $\left\{ (-1)^k \arcsin \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{10}{7}} \right) + \pi k; (-1)^k \arcsin \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{46}{7}} \right) + \pi k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$

5. Ответ: $V = \frac{3\sqrt{3}}{2} (H - 2h) \left(a - \frac{2\sqrt{3}}{3} h \right)^2.$

Экономический факультет
(отделение экономической кибернетики),
филологический факультет
(отделение математической лингвистики),
психологический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $t + T + \sqrt{T^2 + tT}$ и $T + \sqrt{T^2 + tT}$.
2. Ответ: $\emptyset$.
3. Ответ: круг разбивается на семь частей: одну с площадью $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, три с площадями $\frac{\sqrt{3}}{4} + 4\arccos\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$; три с площадями $\frac{8\pi}{3} - 4\arccos\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$.
5. Ответ: $\left\{(-\sqrt{10}; -10); (\sqrt{10}; -10); \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{5}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{5}{2}\right)\right\}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\frac{2(7 + \sqrt{193})}{3}$ и $\frac{1 + \sqrt{193}}{2}$.
2. Ответ: $\emptyset$.
3. Ответ: круг разбивается на девять частей: одну с площадью 2, четыре с площадями $\frac{1}{2} - \pi + 4\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{7}}{2}$; четыре с площадями $2\pi - 4\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{2} - 1$.
4. Ответ: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$.
5. Ответ: $\left\{\left(\frac{3}{2}; -\sqrt{3}\right); \left(\frac{3}{2}; \sqrt{3}\right); \left(-\frac{3}{4}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right); \left(-\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right\}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\frac{T + \sqrt{T^2 + 4t^2}}{2t}$.
2. Ответ: $a = -2$.
3. а) Ответ: $\left\{ \frac{\pi k}{2(2^{n+2} - 1)}; \frac{\pi(2l + 1)}{2^{n+2} + 1} : k \neq p(2^{n+2} - 1), l \neq 2^{n+1} + q(1 + 2^{n+2}), k, l, p, q \in \mathbb{Z} \right\}$.
 б) Ответ: $R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$ и $\frac{4}{3} \pi R^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k^3}} \right)$.
4. Ответ: $\frac{19S}{50}$.
5. Ответ: $\{-1\}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: указанная ситуация не возможна, т.к. оба корня соответствующего квадратного уравнения не принадлежат допустимому интервалу $(0; 2\nu)$.
2. Ответ: $a = 3$.
3. а) Ответ: $\left\{ \frac{2^{n+2} \pi k}{2^{n+2}}; \frac{2^{n+1} \pi(2l + 1)}{2^{n+2} + 1} : k \neq p(2^{n+2} - 1), l \neq 2^{n+1} + q(1 + 2^{n+2}), k, l, p, q \in \mathbb{Z} \right\}$.
 б) Ответ: $k^2 \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{hk^3}{Sr} \right)^2}}$.
4. Ответ: $\frac{S}{12}$.
5. Ответ: $\{-1\}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 45% и 90%.
2. Ответ: $\left\{-2 - \frac{n}{2}; \frac{n}{2}\right\}$.
3. Ответ: $\left\{\sqrt{\pi}\left(-1 + \sqrt{2k+1 \pm \frac{2}{3}}\right); \sqrt{\pi}\left(-1 - \sqrt{2k+1 \pm \frac{2}{3}}\right); k = 0, 1, 2, \dots\right\}$.
4. Ответ: $\frac{h(h-2d)}{\sqrt{2h^2+8d^2}}$ и $\frac{h(h+2d)}{\sqrt{2h^2+8d^2}}$.
5. Ответ: при $a=1$ и $a=-\frac{3}{2}$: $\emptyset$; при $-\frac{3}{2} < a < 1$: $(-\infty; 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}; +\infty)$; при $-\infty < a < -\frac{3}{2}$ и при $a > 1$: $(1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 0,5 и 1 литр.
2. Ответ: $\{-4n-8; 4n\}$.
3. Ответ: $\left\{\sqrt{\pi}\left(-1 + \sqrt{4k+1 \pm \frac{2}{3}}\right); \sqrt{\pi}\left(-1 - \sqrt{4k+1 \pm \frac{2}{3}}\right); k = 0, 1, 2, \dots\right\}$.
4. Ответ: $\sqrt{\frac{h^2}{2}-hd}$ и $\sqrt{\frac{h^2}{2}+hd}$.
5. Ответ: при $b=2$ и $b=-\frac{1}{3}$: $\emptyset$; при $-\frac{1}{3} < b < 2$: $(-\infty; 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}; +\infty)$; при $-\infty < b < -\frac{1}{3}$ и при $b > 2$: $(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\{1\}$.
2. Ответ: $\frac{\sqrt{T^2 + t^2 k^2}}{(T + t)k}$.
3. а) Ответ: $3a + h + \sqrt{a^2 - h^2}$.
б) Ответ: $\frac{10}{3}m - \frac{1}{3}\sqrt{4m^2 - 3h^2} + h$.
4. Ответ: $\left\{ \left(2\pi k; \frac{5\pi}{2} - \pi k \right) : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$.
5. Ответ: $(2 - \sqrt{3}; 3) \cup (3; 2 + \sqrt{3})$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{1\}$.
2. Ответ: $\frac{\sqrt{T^2 + t^2 k^2}}{2t}$.
3. а) Ответ: $3b - \sqrt{b^2 - 4h^2}$.
б) Ответ: $\frac{10}{3}m - \frac{2}{3}\sqrt{m^2 - 3h^2}$.
4. Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{13\pi}{4} + \pi k \right) : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$.
5. Ответ: $(1 - \sqrt{5}; 3) \cup (3; 1 + \sqrt{5})$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 30 и 6 минут.
2. Ответ: $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\pi(\sqrt{3}-1)\sqrt{S}$.
4. Ответ: $\{(\log_2 9; 0); (1; 3)\}$.
5. Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 7 и 338.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\frac{P^2(2+\sqrt{3})}{32}$.
4. Ответ: $\{(2; 1); (0; \log_3 11)\}$.
5. Ответ: $[-2; 2]$.