

Санкт-Петербургский государственный университет, 1986 год
факультет прикладной математики – процессов управления,
математико-механический факультет,
физический факультет

Вариант 1

1. Двое рабочих изготавливают вместе за 8 часов 136 деталей. Если бы первый рабочий делал на 2 детали в час меньше, а второй — на одну больше, то на изготовление одной детали второй рабочий тратил бы на 4 минуты меньше, чем первый. Сколько деталей в час изготавливает первый рабочий?
2. Решите неравенство $3x + \sqrt{5x+9} < -5$.
3. При каких значениях параметра a большее из двух чисел $5a-1$ и $|2a|$ равно квадрату меньшего?
4. а) Расстояние от основания высоты, опущенной из вершины A треугольника ABC , до вершины B в два раза меньше, чем до вершины C . Найдите угол A , если известно, что $\frac{AC}{AB} = a$ (для математико-механического факультета).
б) На стороне AB длины c треугольника ABC выбрана точка D . Через точку D проведены две прямые, параллельные соответственно AC и BC и пересекающие сторону AC в точке F и сторону BC в точке E . Найдите BD , если известно, что $AC = b$, $BC = a$, $\frac{BE}{AF} = \alpha$ (для физического факультета).
в) В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении a . В каком отношении точки касания делят катеты (для факультета прикладной математики – процессов управления)?
5. Шар радиуса R , вписан в треугольную пирамиду, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Один насос подает за 5 часов на 15 м^3 воды меньше, чем другой. Если бы первый насос подавал в час на 2 м^3 воды меньше, а второй — на 3 м^3 воды больше, то, работая вместе, насосы накачивали бы 1 м^3 воды за 5 минут. Сколько кубометров воды в час подает первый насос?
2. Решите неравенство $1 + \sqrt{6-10x} > 3x$.
3. При каких значениях параметра a квадрат меньшего из двух чисел $|a|$ и $2a+2$ на единицу больше большего из них?
4. а) Расстояние от основания высоты, опущенной из вершины A треугольника ABC , до вершины B в три раза меньше, чем до вершины C . Найдите отношение $\frac{AC}{AB}$, если известно, что угол A равен α (для математико-механического факультета).
б) На стороне BC длины a треугольника ABC выбрана точка D , а на сторонах AB и AC , имеющих длины c и b , — точки F и E . Найдите длину CD , если известно, что DF параллельно AC , DE параллельно BA и $\frac{DF}{DE} = \alpha$ (для физического факультета).

в) В треугольник с углом A , равным 60° , вписана окружность. Точка касания окружности делит сторону AB в отношении a . В каком отношении точка касания делит сторону AC (для факультета прикладной математики – процессов управления)?

5. Шар радиуса R , вписан в четырехугольную пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α . Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β . Найдите объем пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1986 год
химический факультет

Вариант 1

1. Если к смеси двух веществ A и B добавить 3 кг вещества A , то его процентное содержание увеличится вдвое. Если же к исходной смеси добавить 3 кг вещества B , то процентное содержание вещества A уменьшится вдвое. Определите вес вещества A и его процентное содержание в смеси.
2. Решите неравенство $x < \sqrt{\frac{5x+2}{3}}$.
3. Решите уравнение $\cos x + \sin x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}}{\cos x}$.
4. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника с углом α при основании.
5. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, если известно, что длина стороны основания равна a , а угол между плоскостью сечения и основанием равен α .

Вариант 2

1. Если бы количество меди в слитке меди и серебра было в 2 раза больше, то ее процентное содержание увеличилось бы в 1,6 раза. Найдите процентное содержание меди в слитке.
2. Решите неравенство $x \geq \sqrt{\frac{6x}{x-1}}$.
3. Решите уравнение $\cos x - \sqrt{3} \sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2 \sin x}$.
4. Высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, равна h , а радиус вписанной окружности — r . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
5. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через боковое ребро и высоту пирамиды, если известно, что длина стороны основания равна a , а двугранный угол при основании равен α .

Санкт-Петербургский государственный университет, 1986 год
географический факультет,
геологический факультет

Вариант 1

1. Из города A в город B , расстояние между которыми 100 км, выехал велосипедист. Через час после этого из A выехал второй велосипедист, который, нагнав первого, с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, в который первый достиг B . Какова скорость первого велосипедиста, если скорость второго 30 км/ч?
2. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \sqrt{3x - 2y} = \sqrt{5 - 3y + x} \end{cases}$$
 (для географического факультета).
б) Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 7x} - \sqrt{x - 3} = 0$ (для геологического факультета).
3. Решите уравнение $\sqrt{-\frac{3}{2}\cos 2x} = \sin x$.
4. Решите неравенство $(\log_{x+1} x) \log_{\frac{1}{x}} (2 - x) > 1$.
5. На плоскости даны две окружности радиусов r_1 и r_2 ($r_1 > r_2$). Найдите расстояние между центрами окружностей, если известно, что оно в k раз больше расстояния между точками касания общей внешней касательной.

Вариант 2

1. Из города A в город B , расстояние между которыми 105 км, выехал велосипедист. Через час после этого из A выехал второй велосипедист, который, нагнав первого, с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в B в тот момент, в который первый достиг B . Какова скорость первого велосипедиста, если скорость второго на 5 км/ч больше скорости первого?
2. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2^x + \frac{1}{2^y} = 10, \\ \sqrt{x + y} = \sqrt{4 + 2y} \end{cases}$$
 (для географического факультета).
б) Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x - 1} = 0$ (для геологического факультета).
3. Решите уравнение $\sqrt{\frac{2}{3}\cos x} = \sqrt{\cos 2x}$.
4. Решите неравенство $\left(\log_{\frac{x+1}{x}} x\right) (\log_x (2x - 1) - 1) \leq -1$.
5. На плоскости даны две окружности радиусов r_1 и r_2 , касающиеся некоторой прямой в точках A и B , и лежащие по разные стороны от этой прямой. Найдите расстояние между центрами окружностей, если известно, что оно в k раз больше длины отрезка AB .

Санкт-Петербургский государственный университет, 1986 год
биолого-почвенный факультет
филологический факультет
(отделение математической лингвистики)

Вариант 1

1. Из города A в город B , расстояние между которыми 270 км отправился путешественник. Первую часть пути длиной 120 км он преодолел на автомобиле, вторую — на мотоцикле. Оставшуюся третью часть пути он проехал на автомобиле за 1 час. Скорость мотоцикла на 15 км/ч меньше скорости автомобиля. Найдите скорость автомобиля, если известно, что средняя скорость путешественника равна 54 км/ч.
2. Решите уравнение $\sqrt{2x+1} + \sqrt{6x+4} = 1$.
3. а) Решите уравнение $\sin x + 2\sin^3 x + \sqrt{2}\sin 2x = 0$ (для отделений почвоведения и математической лингвистики).
б) Решите неравенство $\frac{1-\sin x}{\sin 2x} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. а) В прямоугольный треугольник площади 24 см^2 вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2:3. Найдите длины сторон треугольника (для отделения почвоведения).
б) Окружность касается сторон AB и AD квадрата $ABCD$ и проходит через вершину C . В каком отношении эта окружность делит сторону BC ?
5. Основание треугольной пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α . Найдите объем пирамиды, если известно, что все двугранные углы при основании пирамиды равны β .

Вариант 2

1. Из города A в город B , расстояние между которыми 500 км отправился путешественник. Первую часть пути на автомобиле он преодолел за 2 часа, вторую часть пути — на мотоцикле и оставшуюся третью часть пути длиной 210 км — снова на автомобиле. Найдите скорость автомобиля, если известно, что средняя скорость путешественника равна 62,5 км/ч, и скорость мотоцикла на 20 км/ч меньше скорости автомобиля.
2. Решите уравнение $\sqrt{1-x} - \sqrt{2x-1} = -1$.
3. а) Решите уравнение $5\cos x = 2(\cos^3 x + \sqrt{2}\sin 2x)$ (для отделений почвоведения и математической лингвистики).
б) Решите неравенство $\frac{1+\cos x}{\sin 2x} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. а) В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, угол B равен 30° , а радиус вписанной окружности — 3 см. Найдите расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности катета AB (для отделения почвоведения).
б) Точка P на стороне BC длины a квадрата $ABCD$ такова, что $\frac{PC}{BP} = 7$. Найдите радиус окружности, касающейся сторон AB и AD и проходящей через точку P .
5. Основание треугольной пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α . Боковые грани пирамиды, содержащие катеты основания, перпендикулярны плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β . Найдите площадь поверхности пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1986 год
факультет психологии,
экономический факультет

Вариант 1

1. Два путешественника отправились из пункта A в пункт B на велосипедах. Каждый через некоторое время пересел на мотоцикл: первый, проехав $\frac{1}{8}$ пути, а второй — $\frac{3}{4}$ пути. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости велосипеда, если известно, что первый путешественник затратил на весь путь из A в B в два раза меньше времени, чем второй?
2. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2^x + 3 \cdot 2^y = 7, \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$
 (для факультета психологии и отделения экономической кибернетики).
б) Решите уравнение $2 \lg x^3 = \lg(x^6 + x^2 - x - 2)$ (для отделения политэкономии и прикладной социологии).
в) Решите неравенство $3x + 2 + \sqrt{5x + 4} < 0$.
3. а) Решите уравнение $2 \sin^3 x \cdot \cos^3 2x = \sin^2 x + \cos^2 2x$ (для факультета психологии).
б) Решите уравнение $1 + 2 \sin x \cdot \sin 3x = 4 \sin x + 4 \sin 3x + \cos 2x$ (для отделений экономической кибернетики, политэкономии и прикладной социологии).
в) Решите уравнение $\frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\cos x} = \sqrt{6}$.
4. а) Найдите периметр равнобедренного треугольника площади S , если известно, что длина высоты, опущенной на основание, равна h (для факультета психологии и отделения экономической кибернетики).
б) Решите неравенство $\log_2 \left(\frac{x+2}{x+1} \right) \leq -1$ (для отделений политэкономии и прикладной социологии).
в) Решите уравнение $\log_x 4 + \log_2 x^2 = 5$.
5. а) Изобразите на плоскости множество точек $M(x; y)$, для которых $|x+y| + |x-y| \leq 2$ (для отделений политэкономии и прикладной социологии).
б) Основанием четырехугольной пирамиды $OABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$. Боковые грани OAB , OBC и OCD наклонены к основанию соответственно под углами 45° , 60° и 45° . Найдите угол наклона грани OAD к основанию.

Вариант 2

1. Из пункта A в пункт B с одинаковыми скоростями вышли два пешехода. Каждый через некоторое время увеличил скорость в 2,5 раза: первый, пройдя $\frac{1}{12}$ пути, второй — $\frac{5}{6}$ пути. Во сколько раз быстрее второго первый пешеход достиг B .
2. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{1}{2^{x-2}} + \frac{3}{2^y} = 14, \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$
 (для факультета психологии и отделения экономической кибернетики).
б) Решите уравнение $\lg(\sqrt{x^4 - 5}) = \frac{1}{2} \lg(x^4 - x^2 - 3x - 7)$ (для отделения политэкономии и прикладной социологии).

- в) Решите неравенство $2x + \sqrt{6 - 2x - 4x^2} < 0$.
3. а) Решите уравнение $\sin^2 x + \cos^2 2x + 2\sin^3 x \cdot \cos^2 2x = 0$ (для факультета психологии).
 б) Решите уравнение $1 + 2\cos x \cdot \cos 3x = 4\cos x - \cos 2x + 4\cos 3x$ (для отделений экономической кибернетики, политэкономии и прикладной социологии).
- в) Решите уравнение $\frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\cos x + \sin x} = 1$.
4. а) Найдите площадь равнобедренного треугольника периметра P , если известно, что длина высоты, опущенной на основание, равна h (для факультета психологии и отделения экономической кибернетики).
 б) Решите неравенство $\frac{1}{\log_3 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)} \geq 1$ (для отделений политэкономии и прикладной социологии).
- в) Решите уравнение $\log_3(x^2) - \log_{\sqrt{x}} 3 = 3$.
5. а) Изобразите на плоскости множество точек $M(x; y)$, для которых $|x| + |y| \leq 2$ (для отделений политэкономии и прикладной социологии).
 б) Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник площади $2 + 2\sqrt{3}$. Три двугранных угла при основании равны 60° , а четвертый — 45° . Найдите периметр основания.

Ответы к вариантам

Факультет прикладной математики – процессов управления,
математико-механический факультет,
физический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 8.
2. Ответ: $\left[-\frac{9}{5}; -\frac{16}{9}\right)$.
3. Ответ: $\left\{1; \frac{6-\sqrt{11}}{25}\right\}$.
4. а) Ответ: $\arccos\left(\frac{2-a^2}{a}\right); \arccos\left(\frac{a^2+2}{3a}\right); a \in (1; 2)$.
б) Ответ: $\frac{abc}{a+ab}$.
в) Ответ: $\frac{-a-1+\sqrt{a^2+6a+1}}{2}; \frac{-a-1+\sqrt{a^2+6a+1}}{2a}$.
5. Ответ: $\frac{1}{3}R^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{ctg}^3\left(\frac{\beta}{2}\right)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 4.
2. Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{9}\right)$.
3. Ответ: $\left\{3; \frac{-9-\sqrt{33}}{8}\right\}$
4. а) Ответ: $-\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + 3}$, если $\alpha > \frac{\pi}{6}$; $-\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + 3}; 2 \cos \alpha \pm \sqrt{4 \cos^2 \alpha - 3}$,
если $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$.
б) Ответ: $\frac{ab}{ac+b}$.
в) Ответ: $\frac{1+a}{3a-1}$, при $a \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
5. Ответ: $\frac{4}{3} \frac{R^3 \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg}^3\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin \alpha}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 1 кг, $33\frac{1}{3}\%$.
2. Ответ: $\left[-\frac{2}{5}; 2\right)$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{8} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin 2\alpha$.
5. Ответ: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{48 \cos \alpha}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 25%.
2. Ответ: $[3; +\infty) \cup \{0\}$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{6} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)} \quad (h > 2r)$.
5. Ответ: $\frac{1}{8} a^2 \operatorname{tg} \alpha$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 20 км/ч.
2. а) Ответ: $\left\{\left(\frac{3}{2}; 2\right)\right\}$.
б) Ответ: $\{4 + \sqrt{13}\}$.
3. Ответ: $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 2\right)$.
5. Ответ: $\frac{k(r_1 - r_2)}{\sqrt{k^2 - 1}} \ (k > 1)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 15 км/ч.
2. а) Ответ: $\{(3; -1)\}$.
б) Ответ: $\{2 + \sqrt{3}\}$.
3. Ответ: $\left\{\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$.
5. Ответ: $\frac{k(r_1 + r_2)}{\sqrt{k^2 - 1}} \ (k > 1)$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 60 км/ч.

2. Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

3. а) Ответ: $\left\{\pi k; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

б) Ответ: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$.

4. а) Ответ: 10,8 и 6 см.

б) Ответ: $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

5. Ответ: $\frac{\frac{c^3}{6} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 70 км/ч.

2. Ответ: $\{1\}$.

3. а) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

б) Ответ: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

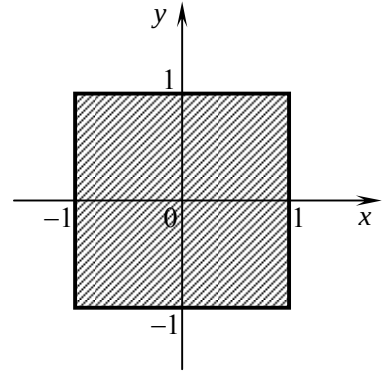
4. а) Ответ: $\sqrt{45 + 18\sqrt{3}}$.

б) Ответ: $\frac{5a}{8}$.

5. Ответ: $\frac{c^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta + \sin \alpha \operatorname{tg} \beta + 1}{\cos \beta} \right)$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 3 раза.
2. а) Ответ: $\{(2; 0); (0; 1)\}$.
 б) Ответ: $\{2\}$.
 в) Ответ: $\left[-\frac{4}{5}; -\frac{7}{9}\right)$.
3. а) Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 б) Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 в) Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. а) Ответ: $\frac{2(s + \sqrt{h^4 + s^2})}{h}$.
 б) Ответ: $[-3; -2)$.
 в) Ответ: $\{4; \sqrt{2}\}$.
5. а) Ответ: см. рисунок.
 б) Ответ: 30° .



Ответы к варианту 2

1. Ответ: 2 раза.
2. а) Ответ: $\{(-1; -1); (1; -2)\}$.
 б) Ответ: $\{-2\}$.
 в) Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; -1\right)$.
3. а) Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 б) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 в) Ответ: $\left\{2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. а) Ответ: $\frac{p^2 h - 4h^3}{4p}$.
 б) Ответ: $[2; +\infty)$.
 в) Ответ: $\left\{9; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.
5. а) Ответ: см. рисунок.
 б) Ответ: $6 + 2\sqrt{3}$.

