

Санкт-Петербургский государственный университет, 1987 год
факультет прикладной математики – процессов управления,
математико-механический факультет,
физический факультет

Вариант 1

1. Сумма цифр некоторого трехзначного числа равна 11. Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть 594, то получится искомое число. Найдите это трехзначное число, если известно, что сумма трех попарных произведений цифр этого числа равна 31.
2. Решите неравенство $x - \sqrt{1-x} \leq 0$.
3. а) Числа x , y , a таковы, что $x + y = a - 1$, $x^2 + y^2 = 5a - 3a + \frac{1}{2}$. При каком значении a произведения $x \cdot y$ принимает наибольшее значение (для математико-механического факультета)?
б) Решите уравнение $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$ (для физического факультета).
в) Решите уравнение $8\cos x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin x}$ (для факультета прикладной математики – процессов управления).
4. Найдите площадь квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника).
5. Все четыре грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна $\sqrt{3}$. Найдите длину оснований этих треугольников, если известно, что объем пирамиды равен $\frac{2}{3}$.

Вариант 2

1. Сумма квадратов цифр некоторого трехзначного числа равна 74, а цифра сотен равна удвоенной сумме цифр десятков и единиц. Найдите это число, если известно, что разность между ними и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 495.
2. Решите неравенство $x + \sqrt{2-x} > 0$.
3. а) Числа x , y , a таковы, что $x + y = a + 1$, $xy = a^2 - 3a + 4$. При каком значении a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение (для математико-механического факультета)?
б) Решите уравнение $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$ (для физического факультета).
в) Решите уравнение $4\cos x \cos 2x = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ (для факультета прикладной математики – процессов управления).
4. В прямоугольный треугольник вписан квадрат (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника). В каком отношении вершина квадрата делит катет треугольника, если известно, что угол, противолежащий этому катету, равен α .
5. Граниями треугольной пирамиды являются равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна a . Найдите длину оснований этих треугольников, при которой объем пирамиды принимает максимальное значение.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1987 год
биолого-почвенный факультет

Вариант 1

1. Два лыжника стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй лыжник догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретился с первым лыжником. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого лыжника. Найдите скорость первого лыжника.
2. Решите уравнение $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.
3. а) Решите уравнение $\sqrt{10 - 18\cos x} = 6\cos x - 2$ (для отделения почвоведения).
б) При каких значениях параметра a уравнение $\cos(\sqrt{a - x^2}) = 1$ имеет ровно 8 решений?
4. В окружность радиуса r вписана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании и высотой h . Найдите площадь трапеции.
5. Объем правильной треугольной призмы равен V , угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен a . Найдите сторону основания призмы.

Вариант 2

1. Два бегуна стартовали с интервалом в 6 минут. Второй бегун догнал первого в двух километрах от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от точки поворота. Найдите скорость первого бегуна.
2. Решите уравнение $\log_2(2^x - 7) = 3 - x$.
3. а) Решите уравнение $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$ (для отделения почвоведения).
б) При каких значениях параметра a уравнение $\sin(\sqrt{a - x^2}) = 1$ имеет ровно 7 решений?
4. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с острым углом α при основании, если известно, что площадь трапеции равна S .
5. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна S , угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен a . Найдите длину бокового ребра призмы.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1987 год
химический факультет

Вариант 1

1. Из колбы, в которой имеется 80 г 10%-го раствора поваренной соли, отливают некоторую часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится втрое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2%. Определить, какое количество раствора отлили из колбы в пробирку.
2. Решите уравнение $(x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0$.
3. Решите уравнение $\sin x = \sqrt{\sin^2 3x - \sin^2 2x}$.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AC и AE . Найдите длину высоты AE , если известно, что $AB = 6$, $AD = BC = 4$.
5. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α , а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r .

Вариант 2

1. Из колбы, в которой имеется раствор поваренной соли, отливают в пробирку $\frac{1}{7}$ часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2%. Определить исходное процентное содержание соли.
2. Решите уравнение $(x^2 - 1)\sqrt{2x - 1} = 0$.
3. Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{\cos^2 3x - \cos^2 x}$.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD . Найдите длину стороны AB , если известно, что $AC = 3$, $BD = \sqrt{3}$ и $AD = BC$.
5. Вычислите объем правильной четырехугольной пирамиды, зная, что плоский угол при основании боковой грани равен α , а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r .

Санкт-Петербургский государственный университет, 1987 год
географический факультет,
геологический факультет

Вариант 1

1. Два мотоциклиста, выехав одновременно из пункта A , едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый мотоциклист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии 13 км от B , затем, достигнув A и снова повернув обратно к B , он встречает второго мотоциклиста, проехав $\frac{1}{7}$ расстояния от A до B . Найдите расстояние от A до B .
2. а) Решите уравнение $\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_x 2} - \log_2 \left(\frac{x^3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$ (для географического факультета).
б) Решите уравнение $\sqrt{1+4x-x^2} = x-1$ (для геологического факультета).
3. Решите уравнение $\sin 7x - \sin x + 2\cos^2 2x = 1$.
4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 2 см, а гипотенуза — 13 см.
5. а) Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60° , боковое ребро равно a . Через середину одного из боковых ребер перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите площадь сечения (для географического факультета).
б) Решите неравенства $\log_{\frac{x+1}{5}}(x^2 - 6x + 9) \geq 0$ (для геологического факультета).

Вариант 2

1. Два велосипедиста, выехав одновременно из пункта A , едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Второй велосипедист, обогнав первого, встречает его на обратном пути, проехав $\frac{1}{8}$ расстояния от B до A . Достигнув A и снова повернув обратно к B , он встречает первого велосипедиста, проехав 21 км после последнего поворота. Найдите расстояние от A до B .
2. а) Решите уравнение $\log_3(\sqrt{x}) - 2 = \frac{\log_2\left(\frac{1}{x}\right)}{\log_x 3} + \log_2\left(\frac{x^3}{4}\right)$ (для географического факультета).
б) Решите уравнение $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$ (для геологического факультета).
3. Решите уравнение $\sin 7x + \sin 3x + 2\sin^2 x = 1$.
4. Найдите стороны прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 6 см, а радиус описанной — 17 см.
5. а) Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60° , высота равна h . Через точку на высоте, отстоящую на $\frac{h}{3}$ от вершины, проведена плоскость перпендикулярно одному из боковых ребер. Найдите площадь сечения (для географического факультета).
б) Решите неравенства $\log_{\frac{x+1}{4}}(x^2 - 4x + 4) \geq 0$ (для геологического факультета).

Ответы к вариантам

Факультет прикладной математики – процессов управления,
математико-механический факультет,
физический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 137.
2. Ответ: $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.
3. а) Ответ: $a = 0$.
б) Ответ: $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.
в) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\frac{(a^2 + b^2)a^2b^2}{(a^2 + b^2 + ab)^2}$.
5. Ответ: 2.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 813.
2. Ответ: $(-2; 2]$.
3. а) Ответ: $a = 3$.
б) Ответ: $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.
в) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\frac{\sin 2\alpha}{2}$.
5. Ответ: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 12 км/ч.
2. Ответ: $\{2\}$.
3. а) Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
б) Ответ: $a \in (36\pi^2; 64\pi^2)$.
4. Ответ: $h \cdot \sqrt{4r^2 \sin^2 \alpha - h^2}$.
5. Ответ: $\sqrt[3]{\frac{8V \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3 - 12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}}, \alpha < 60^\circ$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 10 км/ч.
2. Ответ: $\{3\}$.
3. а) Ответ: $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
б) Ответ: $a = \frac{169}{4}\pi^2$.
4. Ответ: $\frac{\sqrt{S^2 + a^4 \sin^4 \alpha}}{2a \sin^2 \alpha}$.
5. Ответ: $\sqrt{\frac{S\sqrt{2 \cos \alpha}}{8 \sin \frac{\alpha}{2}}}, \alpha < 90^\circ$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 20 г.
2. Ответ: $\{-2; -1; 2\}$.
3. Ответ: $\left\{ \pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $3\sqrt{3}$.
5. Ответ: $\frac{2}{3}r^3 \sin^2 \alpha \cdot \sqrt{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha}$, $\alpha < 120^\circ$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 26%.
2. Ответ: $\left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$.
3. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $\sqrt{7}$.
5. Ответ: $\frac{4}{3}r^3 \sin^2 2\alpha \cdot \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 2\alpha}$, $\alpha < 90^\circ$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 182 км.
2. а) Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{3}}{8}\right\}$.
б) Ответ: $\{3\}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\arctg\left(\frac{12}{5}\right), \arctg\left(\frac{5}{12}\right)$.
5. а) Ответ: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{6}$.
б) Ответ: $[2; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 84 км.
2. а) Ответ: $\left\{\frac{27}{\sqrt{2}}\right\}$.
б) Ответ: $\{-1\}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; (-1)^k \frac{\pi}{30} + \frac{\pi k}{5} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: 16 см, 30 см, 34 см.
5. а) Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{18} h^2$.
б) Ответ: $[1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.