

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. Решите уравнение $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2$.
2. Решите неравенство $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x \leq 1$.
3. Найдите все пары $\{a; b\}$ значений параметров a и b , для которых все вещественные корни уравнения $x^2 - ax + a = 0$ являются такими уравнения $x^2 + b^2x - 8b = 0$.
4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E . Точка G является точкой пересечения прямой, параллельной BC и проходящей через D , с отрезком AE , а точка F — точка пересечения отрезка CD с прямой, проходящей через E и параллельно AB . Докажите, что GF параллельна основанию AC .
5. В прямой круговой конус вписан шар объемом V . Какое наименьшее значение может иметь объем конуса?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 - \sin x}{1 - \cos x} = 2$.
2. Решите неравенство $5\sqrt{\log_2 x} - \log_2 4x - 4 \leq 0$.
3. Найти все пары $\{a; b\}$ значений параметров a и b , для которых все вещественные корни уравнения $x^2 + ax + a = 0$ являются такими уравнения $bx^2 + 8x - b^2 = 0$.
4. На продолжение сторон AB и AC треугольника ABC выбраны точки E и D . Точка F является точкой пересечения продолжения отрезка CE с прямой, проходящей через E и параллельной AC . Докажите, что отрезок FG параллелен основанию BC .
5. В правильную четырех угольную пирамиду вписан шар объемом V . Какое наименьшее значение может иметь объем пирамиды?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
физический факультет

Вариант 1

1. Решите уравнение $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2$.
2. Решите неравенство $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x \leq 1$.
3. Найдите все пары $\{a; b\}$ значений параметров a и b , для которых все вещественные корни уравнения $x^2 - ax + a = 0$ являются такими уравнения $x^2 + b^2x - 8b = 0$.
4. Найдите площадь фигуры, образованной теми точками $(x; y)$ декартовой плоскости, для которых выполнены неравенства $|x+1| + |y| \leq 2$ и $(x+2)^2 + y^2 \leq 1$.
5. В прямой круговой конус вписан шар объемом V . Какое наименьшее значение может иметь объем конуса?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 - \sin x}{1 - \cos x} = 2$.
2. Решите неравенство $5\sqrt{\log_2 x} - \log_2 4x - 4 \leq 0$.
3. Найти все пары $\{a; b\}$ значений параметров a и b , для которых все вещественные корни уравнения $x^2 + ax + a = 0$ являются такими уравнения $bx^2 + 8x - b^2 = 0$.
4. Найти площадь фигуры, образованной теми точками $(x; y)$ декартовой плоскости, для которых выполнены неравенства $|x| + |y - 1| \leq 2$ и $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$.
5. В правильную четырех угольную пирамиду вписан шар объемом V . Какое наименьшее значение может иметь объем пирамиды?

Вариант 1

1. Числа a , b , c образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-1$, $b-4$, $c-3$ — геометрическую. Известно также, что произведение крайних членов геометрической прогрессии на 2 больше среднего члена арифметической. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\sqrt{5-x^2} = x+1$.
3. Найдите все решения неравенства $1 + \cos 2x \geq \cos x \cdot (1 + |1 - 2 \cos x|)$ на интервале $[0; 2\pi]$.
4. В равнобедренном треугольнике радиус описанного круга равен R , а вписанного — r . Найдите расстояние между центрами этих кругов.
5. В параллельной треугольной пирамиде $SABC$ через ребро основания BC проведено сечение перпендикулярно ребру SA . Найдите отношение объемов частей, на которых это сечение разбивает пирамиду, если известно, что высота в два раза больше окружности, описанной вокруг основания.

Вариант 2

1. Числа x , y , z образуют геометрическую прогрессию, а числа $x+1$, $y+4$, $z+3$ — арифметическую. Известно, что сумма членов геометрической прогрессии равна 13. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\sqrt{17-x^2} = 3-x$.
3. Найдите все решения неравенства $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq \frac{|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x}$ на интервале $[0; \pi]$.
4. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен R , а радиус вписанной r . Найдите расстояние между этих окружностей.
5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота равна утроенному радиусу окружности, вписанной в основание. Плоскость ADE параллельна ребру BC и перпендикулярна грани SBC . Определите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
экономический факультет
(отделение экономической кибернетики)

Вариант 1

1. Числа a , b , c образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-1$, $b-4$, $c-3$ — геометрическую. Известно также, что произведение крайних членов геометрической прогрессии на 2 больше среднего члена арифметической. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\sqrt{5-x^2} = x+1$.
3. Решите неравенство $\left| \frac{1}{2} - \cos x \right| \geq \cos x$.
4. В равнобедренном треугольнике радиус описанного круга равен R , а вписанного — r . Найдите расстояние между центрами этих кругов.
5. В параллельной треугольной пирамиде $SABC$ через ребро основания BC проведено сечение перпендикулярно ребру SA . Найдите отношение объемов частей, на которых это сечение разбивает пирамиду, если известно, что высота в два раза больше окружности, описанной вокруг основания.

Вариант 2

1. Числа x , y , z образуют геометрическую прогрессию, а числа $x+1$, $y+4$, $z+3$ — арифметическую. Известно, что сумма членов геометрической прогрессии равна 13. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\sqrt{17-x^2} = 3-x$.
3. Решите неравенство $\left| \frac{1}{2} + \sin x \right| \geq -\sin x$.
4. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен R , а радиус вписанной r . Найдите расстояние между этих окружностей.
5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота равна утроенному радиусу окружности, вписанной в основание. Плоскость ADE параллельна ребру BC и перпендикулярна грани SBC . Определите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
экономический факультет
(отделение ЭИР)

Вариант 1

1. Числа a , b , c образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-1$, $b-4$, $c-3$ — геометрическую. Известно также, что произведение крайних членов геометрической прогрессии на 2 больше среднего члена арифметической. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\left| \frac{1}{2} + \sin x \right| = -\sin x$.
3. Решите неравенство $\log_{x+1} \left(\frac{3}{2} - x^2 \right) \geq 0$.
4. Найдите минимальные и максимальные значения функции $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$ на интервале $(3; 5)$.
5. В параллельной треугольной пирамиде $SABC$ через ребро основания BC проведено сечение перпендикулярно ребру SA . Найдите отношение объемов частей, на которых это сечение разбивает пирамиду, если известно, что высота в два раза больше окружности, описанной вокруг основания.

Вариант 2

1. Числа x , y , z образуют геометрическую прогрессию, а числа $x+1$, $y+4$, $z+3$ — арифметическую. Известно, что сумма членов геометрической прогрессии равна 13. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\left| \frac{1}{2} + \sin x \right| = -\sin x$.
3. Решите неравенство $\log_{x+1} \left(\frac{3}{2} - x^2 \right) \geq 0$.
4. Найдите минимальные и максимальные значения функции $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x+1}}$.
5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота равна утроенному радиусу окружности, вписанной в основание. Плоскость ADE параллельна ребру BC и перпендикулярна грани SBC . Определите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
биолого-почвенный факультет,
филологический факультет
(отделение математической лингвистики)

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x) = |x-1| - \left| x + \frac{3}{2} \right|$.
2. Решите уравнение $x-1 = \sqrt{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 1}$.
3. Решите неравенство $\cos(2\sin x) > \frac{1}{2}$.
4. На плоскости даны две прямые α и β . Найдите геометрическое место точек, являющихся серединой отрезков, концы которых лежат на α и β .
5. Две равные правильные треугольные пирамиды $SABC$ и $S'A'B'C'$ расположены так, что $S = S'$, центры оснований O и O' совпадают, а $\angle AOA' = \frac{\pi}{6}$. Найдите объем общей части этих двух пирамид, если известно, что стороны оснований равны a , а общая высота пирамиды — h .

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x) = |x+1| - \left| x - \frac{5}{2} \right|$.
2. Решите уравнение $2x-1 = \sqrt{x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x + 1}$.
3. Решите неравенство $\cos(2\sin x) > \frac{1}{2}$.
4. На плоскости дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место точек, являющихся серединой отрезков, концы которых лежат на AB и CD .
5. Две равные правильные четырехугольные пирамиды $SABCD$ и $S'A'B'C'D'$ расположены так, что $S = S'$, центры оснований O и O' совпадают, а $\angle AOA' = \frac{\pi}{6}$. Найдите объем общей части этих двух пирамид, если известно, что стороны оснований равны a , а общая высота пирамиды — h .

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ |x - y| = 2. \end{cases}$
2. Решите уравнение $\cos^2 2x - 4\sin^4 x + 3 = 0$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(2x + 3) > \log_9 27$.
4. На сторонах треугольника ABC построены вне его правильные треугольники. Докажите, что круги, описанные вокруг этих треугольников, целиком покрывают треугольник ABC .
5. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две части равного объема. В каком отношении находятся площади боковых поверхностей этих частей?

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ |x - 2y| = 2. \end{cases}$
2. Решите уравнение $\sin^2 2x + 4\cos^4 x - 4 = 0$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{27}}(3 - 2x) > \log_3 16$.
4. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ построены вне его как на гипотенузах равнобедренные прямоугольные треугольники. Докажите, что круги, описанные вокруг этих треугольников, целиком покрывают четырехугольник $ABCD$.
5. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две части, имеющие равные площади поверхности. В каком отношении находятся объемы этих частей?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
географический факультет,
экономический факультет
(отделение политэкономии, отделение прикладной социологии)

Вариант 1

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ и постройте ее график.
2. Решите уравнение $\sqrt{\cos x} = 1 - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Решите неравенство $\log_{x-2}(1 + 11x^3 - x^6) < 0$.
4. Найдите площадь фигуры, образованной теми точками $(x; y)$ декартовой плоскости, для которых выполнены условия $|x| + |y - 1| \leq 2$ и $x^2 + y^2 \geq 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}y$.
5. В прямой треугольной призме $ABCA'B'C'$ через точку A и среднюю линию $D'E'$ основания $A'B'C'$ параллельную $A'B'$ проведено сечение. Найдите отношение объемов образовавшихся частей призмы.

Вариант 2

1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 + x}$ и постройте ее график.
2. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} = 1 + \cos\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Решите неравенство $\log_{x-1}(1 + 3x^{\frac{5}{2}} - x^5) < 0$.
4. Найдите площадь фигуры, образованной теми точками $(x; y)$ декартовой плоскости, для которых выполнены условия $|x + 1| + |y| \leq 2$ и $x^2 + y^2 - 1 \leq 2\sqrt{3}x$.
5. В прямой треугольной призме $ABCA'B'C'$ через вершину A и середину D и E сторон BB' и CC' проведено сечение. Найдите отношение объемов образовавшихся частей призмы.

Вариант 1

1. Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 12, а число, записанное теми же цифрами в противоположном порядке, меньше утроенного исходного числа на 24.
2. Решите уравнение $(7 \cos^2 x - 2)\sqrt{2 \cos x + 1} = 0$.
3. Решите неравенство $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x} \geq \sqrt{3-x}$.
4. Постройте график функции $f(x) = \frac{x^2 - 3|x| + 4}{x}$.
5. В правильной треугольной пирамиде высота равна H , а радиус круга, вписанного в основание, равен R . Найдите объем шара, касающегося плоскостью основания в его центре и плоскости, проведенной через вершину пирамиды и середины двух сторон основания

Вариант 2

1. Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 13, а число, записанное теми же цифрами в противоположном порядке, меньше утроенного исходного числа на 34.
2. Решите уравнение $(2 \sin^2 x - 1)\sqrt{2 - 3 \sin x} = 0$.
3. Решите неравенство $\sqrt{4-x} \leq \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$.
4. Постройте график функции $f(x) = \frac{x^2 + 2|x| - 1}{x}$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна H , а радиус круга, вписанного в основание, равен R . Найдите объем шара, касающегося плоскостью основания в его центре и плоскости, проведенной через вершину пирамиды и середины двух сторон основания.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $[1; 3] \cup [81; +\infty)$.
3. Ответ: $a = -64, b = 8; a = 0, b = 0; a \in (0; 4), b$ — любое; $a = 4, b = 2 \pm \sqrt{2}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $2V$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $[1; 16] \cup [512; +\infty)$.
3. Ответ: $a = -2\sqrt{2}, b = -2\sqrt{2}; a = 0, b = 0; a \in (0; 4), b$ — любое; $a = 4, b = -2 \pm 2\sqrt{5}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $\frac{8}{\pi}V$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $[1; 3] \cup [81; +\infty)$.
3. Ответ: $a = -64, b = 8; a = 0, b = 0; a \in (0; 4), b$ — любое; $a = 4, b = 2 \pm \sqrt{2}$.
4. Ответ: $\frac{\pi}{2} + 1$.
5. Ответ: $2V$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $[1; 16] \cup [512; +\infty)$.
3. Ответ: $a = -2\sqrt{2}, b = -2\sqrt{2}; a = 0, b = 0; a \in (0; 4), b$ — любое; $a = 4, b = -2 \pm 2\sqrt{5}$.
4. Ответ: $\frac{\pi}{2} + 1$.
5. Ответ: $\frac{8}{\pi}V$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 2, 7, 12 или 10, 7, 4.
2. Ответ: $\{1\}$.
3. Ответ: $\left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$.
4. Ответ: $\sqrt{R(R-2r)}$.
5. Ответ: 7:3.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 1, 3, 9 или 9, 3, 1.
2. Ответ: $\{-1\}$.
3. Ответ: $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
4. Ответ: $\sqrt{R(R-2r)}$.
5. Ответ: 51:49.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 2, 7, 12 или 10, 7, 4.
2. Ответ: $\{1\}$.
3. Ответ: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2\pi k + \arccos \frac{1}{4}; 2(k+1)\pi + \arccos \frac{1}{4} \right]$.
4. Ответ: $\sqrt{R(R-2r)}$.
5. Ответ: 7:3.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 1, 3, 9 или 9, 3, 1.
2. Ответ: $\{-1\}$.
3. Ответ: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2\pi k - \arcsin \frac{1}{4}; 2(k+1)\pi + \arcsin \frac{1}{4} \right]$.
4. Ответ: $\sqrt{R(R-2r)}$.
5. Ответ: 51:49.

Ответы к варианту 1

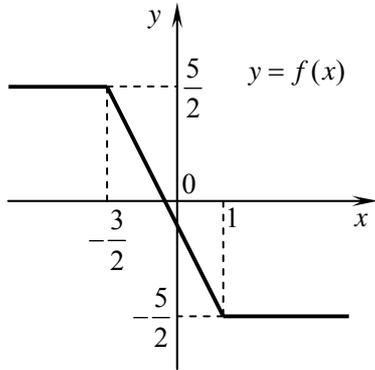
1. Ответ: 2, 7, 12 или 10, 7, 4.
2. Ответ: $\left\{2\pi k \pm \arccos \frac{1}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(-2; -\sqrt{3}] \cup (1; \sqrt{3}]$.
4. Ответ: $\min(f(x)) = 2\sqrt{2}$ при $x = 4$; максимального значения нет.
5. Ответ: 7:3.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 1, 3, 9 или 9, 3, 1.
2. Ответ: $\left\{\pi k - (-1)^k \arcsin \frac{1}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
4. Ответ: $\min(f(x)) = 2\sqrt{2}$ при $x = 1$; максимального значения нет.
5. Ответ: 51:49.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\{2\}$.

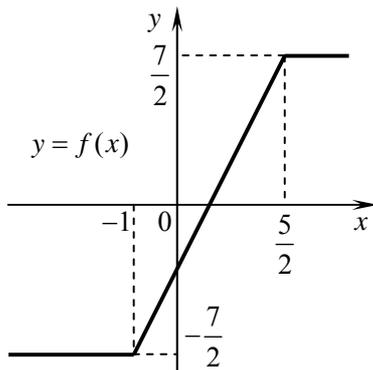
3. Ответ: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2\pi k - \arccos \frac{\pi}{6}; 2\pi k + \arccos \frac{\pi}{6} \right]$.

4. Ответ: если α и β параллельны, то искомое ГМТ — прямая, параллельная α и β и равноудаленная от них; если α и β не параллельны, то искомое ГМТ — вся плоскость.

5. Ответ: $\frac{(3-\sqrt{3})}{12} a^2 h$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\{1\}$.

3. Ответ: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2\pi k - \arcsin \frac{\pi}{6}; 2\pi k + \arcsin \frac{\pi}{6} \right)$.

4. Ответ: .

5. Ответ: $\frac{2(3-\sqrt{3})}{9} a^2 h$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{ (3; 1); \left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3} \right) \right\}$.

2. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{23}{16} \right)$.

4. Ответ: .

5. Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left\{ (0; -1); \left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5} \right) \right\}$.

2. Ответ: $\{ \pi k : k \in \mathbb{Z} \}$.

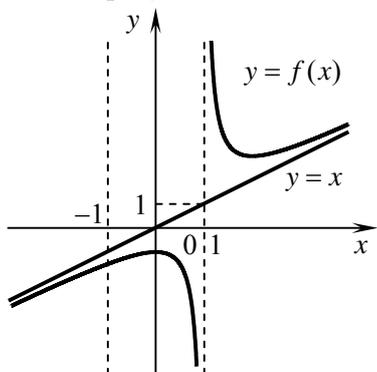
3. Ответ: $\left(\frac{121}{81}; \frac{3}{2} \right)$.

4. Ответ: .

5. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}-1}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{ \pm \arccos \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

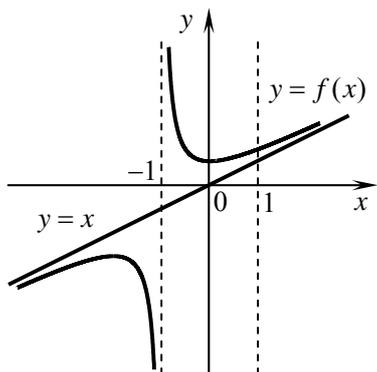
3. Ответ: $(2; \sqrt[3]{11})$.

4. Ответ: $7 - \frac{4\pi}{9} + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Ответ: $\frac{1}{11}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{ (-1)^k \arcsin \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Ответ: $(1; \sqrt[5]{9})$.

4. Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$.

5. Ответ: $\frac{1}{2}$.

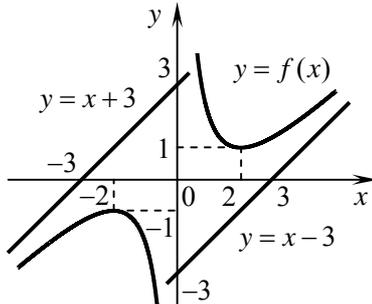
Ответы к варианту 1

1. Ответ: 309.

2. Ответ: $\left\{ \pm \arccos \frac{\sqrt{14}}{7} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Ответ: $\left[\frac{3}{2}; 3 \right] \cup \{0\}$.

4. Ответ: см. рисунок.



5. Ответ: $\frac{\pi R^3}{48H^3} (\sqrt{4H^2 + R^2} - R)^3$.

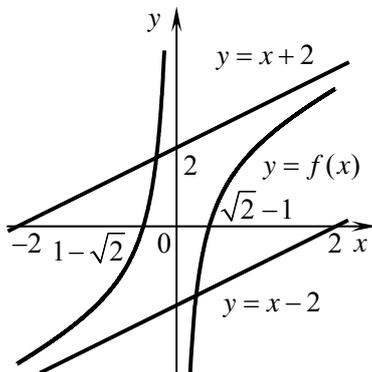
Ответы к варианту 2

1. Ответ: 157.

2. Ответ: $\left\{ (-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \pi k; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Ответ: $\left[\frac{17}{5}; 4 \right] \cup \{1\}$.

4. Ответ: см. рисунок.



5. Ответ: $\frac{\pi R^3}{48H^3} (\sqrt{4H^2 + R^2} - R)^3$.