Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
факультет прикладной математики – процессов управления,
математико-механический факультет,
физический факультет

Вариант 1

1. Сумма цифр некоторого трехзначного числа равна 11. Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть 594, то получится искомое число. Найдите это трехзначное число, если известно, что сумма трех попарных произведений цифр этого числа равна 31.
2. Решите неравенство $x-\sqrt{1-x}\le 0$.
3. а) Числа x, y, a таковы, что $x+y=a-1$, $x^2+y^2=5a-3a+\frac{1}{2}$. При каком значении a произведение $x\cdot y$ принимает наибольшее значение (математико-механический факультет)?

   б) Решите уравнение $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4$ (физический факультет).

   в) Решите уравнение $8\cos x=\frac{1}{\cos x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin x}$ (факультет прикладной математики – процессов управления).
4. Найдите площадь квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника).
5. Все четыре грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна $\sqrt{3}$. Найдите длину оснований этих треугольников, если известно, что объем пирамиды равен $\frac{2}{3}$.

Вариант 2

1. Сумма квадратов цифр некоторого трехзначного числа равна 74, а цифра сотен равна удвоенной сумме цифр десятков и единиц. Найдите это число, если известно, что разность между ними и числом, записанным теме же цифрами, но в обратном порядке, равна 495.
2. Решите неравенство $x+\sqrt{2-x}>0$.
3. а) Числа x, y, a таковы, что $x+y=a+1$, $xy=a^2-3a+4$. При каком значении a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение (математико-механический факультет)?

   б) Решите уравнение $\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2$ (физический факультет).

   в) Решите уравнение $4\cos x\cos 2x=\cos x-\sqrt{3}\sin x$ (факультет прикладной математики – процессов управления).
4. В прямоугольный треугольник вписан квадрат (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника). В каком отношении вершина квадрата делит катет треугольника, если известно, что угол, противолежащий этому катету, равен α.
5. Гранями треугольной пирамиды являются равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна a. Найдите длину оснований этих треугольников, при которой объем пирамиды принимает максимальное значение.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
биолого-почвенный факультет

Вариант 1

1. Два лыжника стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй лыжник догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретился с первым лыжником. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого лыжника. Найдите скорость первого лыжника.
2. Решите уравнение $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.
3. а) Решите уравнение $\sqrt{10 - 18\cos x} = 6\cos x - 2$ (отделение почвоведения).

   б) При каких значениях параметра *a* уравнение $\cos(\sqrt{a - x^2}) = 1$ имеет ровно 8 решений?
4. В окружность радиуса *r* вписана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании и высотой *h*. Найдите площадь трапеции.
5. Объем правильной треугольной призмы равен *V*, угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α. Найдите сторону основания призмы.

Вариант 2

1. Два бегуна стартовали с интервалом в 6 минут. Второй бегун догнал первого в двух километрах от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от точки поворота. Найдите скорость первого бегуна.
2. Решите уравнение $\log_2(2^x - 7) = 3 - x$.
3. а) Решите уравнение $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$ (отделение почвоведения).

   б) При каких значениях параметра *a* уравнение $\sin(\sqrt{a - x^2}) = 1$ имеет ровно 7 решений?
4. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с острым углом α при основании, если известно, что площадь трапеции равна *S*.
5. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна *S*, угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α. Найдите длину бокового ребра призмы.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
химический факультет

Вариант 1

1. Из колбы, в которой имеется 80 г 10%-го раствора поваренной соли, отливают некоторую часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится втрое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2%. Определите, какое количество раствора отлили из колбы в пробирку.
2. Решите уравнение $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.
3. Решите уравнение $\sin x=\sqrt{\sin^2 3x-\sin^2 2x}$.
4. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *CD* и *AE*. Найдите длину высоты *AE*, если известно, что $AB=6$, $AD=BC=4$.
5. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен *r*.

Вариант 2

1. Из колбы, в которой имеется раствор поваренной соли, отливают в пробирку $\frac{1}{7}$ часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2%. Определите исходное процентное содержание соли.
2. Решите уравнение $(x^2-1)\sqrt{2x-1}=0$.
3. Решите уравнение $\sin 2x=\sqrt{\cos^2 3x-\cos^2 x}$.
4. В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *BD*. Найдите длину стороны *AB*, если известно, что $AC=3$, $BD=\sqrt{3}$ и $AD=BC$.
5. Вычислите объем правильной четырехугольной пирамиды, зная, что плоский угол при основании боковой грани равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен *r*.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
геологический факультет,
географический факультет

Вариант 1

1. Два мотоциклиста, выехав одновременно из пункта *A*, едут с разными, но постоянными скоростями в пункт *B* и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый мотоциклист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии 13 км от *B*, затем, достигнув *A* и снова повернув обратно к *B*, он встречает второго мотоциклиста, проехав $\frac{1}{7}$ расстояния от *A* до *B*. Найдите расстояние от *A* до *B*.
2. а) Решить уравнение $\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_x 2} - \log_2\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$ (географический факультет).

   б) Решить уравнение $\sqrt{1+4x-x^2} = x-1$ (геологический факультет).
3. Решите уравнение $\sin 7x - \sin x + 2\cos^2 2x = 1$.
4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 2 см, а гипотенуза — 13 см.
5. а) Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен $60°$, боковое ребро равно *a*. Через середину одного из боковых ребер перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите площадь сечения (географический факультет).

   б) Решите неравенство $\log_{\frac{x+1}{5}}(x^2-6x+9) \geq 0$ (геологический факультет).

Вариант 2

1. Два велосипедиста, выехав одновременно из пункта *A*, едут с разными, но постоянными скоростями в пункт *B* и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Второй велосипедист, обогнав первого, встречает его на обратном пути, проехав $\frac{1}{8}$ расстояния от *B* до *A*. Достигнув *A*, и снова повернув обратно к *B*, он встречает первого велосипедиста, проехав 21 км после последнего поворота. Найдите расстояние от *A* до *B*.
2. а) Решить уравнение $\log_3 \sqrt{x} - 2 = \frac{\log_2\left(\frac{1}{x}\right)}{\log_x 3} + \log_2\left(\frac{x^3}{4}\right)$ (географический факультет).

   б) Решить уравнение $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$ (геологический факультет).
3. Решите уравнение $\sin 7x + \sin 3x + 2\sin^2 x = 1$.
4. Найдите стороны прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 6 см, а радиус описанной — 17 см.
5. а) Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен $60°$, высота равна *h*. Через точку на высоте, отстоящую на $\frac{h}{3}$ от вершины, проведена плоскость, перпендикулярно одному из боковых ребер. Найдите площадь сечения (географический факультет).

   б) Решите неравенство $\log_{\frac{x+1}{4}}(x^2-4x+4) \geq 0$ (геологический факультет).

Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
филологический факультет
отделение математической лингвистики

Вариант 1

1. От пристани *A* одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в *A* через 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от *A*.
2. Решите уравнение $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1)=3$.
3. Найдите все решения $\sqrt{\frac{1}{2}-\cos 2x}>\sin x-\cos x$, удовлетворяющие условию $0\le x\le\pi$.
4. Вне квадрата *ABCD* дана точка *O*. Найдите площадь квадрата, сели известно, что $OA=OB=5$ и $DO=\sqrt{13}$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Найдите двугранный угол при боковом ребре.

Вариант 2

1. Два самолета вылетают одновременно из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу и встречаются на расстоянии 300 км от середины *AB*. Если бы первый самолет вылетел на 1 час позже, то они встретились бы на середине *AB*. Если же, наоборот, второй самолет вылетел бы на 1 час позже первого, то они встретились бы на четверти пути от *B*. Найдите расстояние *AB* и скорости самолетов.
2. Решите уравнение $\log_{1-x}(4x^2-9x+1)=3$.
3. Найдите все решения неравенства $\sqrt{\cos x-\sin x}>\sin x-\frac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $0\le x\le\pi$.
4. Внутри квадрата *ABCD* дана точка *O*. Найдите площадь квадрата, если известно, что $OC=OD=\sqrt{10}$ и $OB=\sqrt{26}$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен α. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
факультет психологии,
экономический факультет

Вариант 1

1. Из пункта *A* в пункт *B* выехал грузовой автомобиль. Через 1 час из пункта *A* в пункт *B* выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт *B* одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой автомобиль и легковой автомобиль одновременно выехали из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 12 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от *A* до *B* грузовой автомобиль?
2. а) Решите уравнение $x = 1 + \sqrt{7 - x}$ (отделение политэкономии).

   б) Решите уравнение $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} = \sqrt{2x+7}$.
3. а) Решите неравенство $x^{2\lg x} \geq 10x$ (экономический факультет).

   б) Решить уравнение $2\sin x + 2\cos x + 1 = \sin 2x + 4(\sin^3 x + \cos^3 x)$ (факультет психологии).
4. Около прямоугольного треугольника *ABC* описана окружность. Найдите катеты этого треугольника, если известно, что расстояние от концов гипотенузы до прямой, касающейся окружности в вершине прямого угла треугольника, равны *a* и *b*.
5. а) Центр сферы совпадает с центром основания кругового конуса, а радиусы их равны. Найдите радиус окружности, по которой сфера пересекает конус, если известны высота конуса *H* и угол его осевого сечения α (факультет психологии и отделение экономической кибернетики).

   б) Изобразите на плоскости множество точек $M(x;\, y)$, для которых $2\,|\,x - y - 2\,| \leq 3 - x^2 - y^2$.

Вариант 2

1. Из пункта *A* в пункт *B* выехал мотоциклист. Через 2 часа из пункта *A* в пункт *B* выехал автомобиль, который прибыл в пункт *B* одновременно с мотоциклистом. Если бы автомобиль и мотоциклист одновременно выехали из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 20 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от *A* до *B* мотоциклист?
2. а) Решите уравнение $2 + \sqrt{14 - x} = x$ (отделение политэкономии).

   б) Решите уравнение $\sqrt{x-2} - \sqrt{6x-11} + \sqrt{x+3} = 0$.
3. а) Решите неравенство $x^{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\lg x} \geq \sqrt{x}$ (экономический факультет).

   б) Решить уравнение $\sin x - \cos x = 1 + \sin 2x + 2(\sin^3 x - \cos^3 x)$ (факультет психологии).
4. Около прямоугольного треугольника *ABC* описана окружность. Из вершин *A* и *C* опущены перпендикуляры *AM* и *CN* на прямую, касающуюся окружности в вершине прямого угла *B*. Найдите катеты *AB* и *BC*,если известно, что расстояние от точки *M* до прямой *AB* равно *x*, а расстояние от точки *N* до прямой *BC* — *y*.
5. а) На высоте кругового конуса, как на диаметре, построена сфера, которая пересекает конус по некоторой окружности. Найдите радиус этой окружности, если радиус основания конуса равен *R*, а угол осевого конуса равен α (факультет психологии и отделение экономической кибернетики).

   б) Изобразите на плоскости множество точек $M(x;\, y)$, для которых $\frac{3}{2} - x^2 - y^2 \geq |\,x + y - 1\,|$.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 137.
2. Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.
3. а) Ответ: 0.

   б) Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.

   в) Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\pi k; \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\dfrac{(a^2+b^2)a^2b^2}{(a^2+b^2+ab)^2}$.
5. Ответ: 2.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 813.
2. Ответ: $(-2; 2]$.
3. а) Ответ: 3.

   б) Ответ: $\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

   в) Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$.
5. Ответ: $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Биолого-почвенный факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $12\ \text{км}/\text{ч}$.
2. Ответ: $\{2\}$.
3. а) Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   б) Ответ: $a\in(36\pi^2;\,64\pi^2)$.
4. Ответ: $h\sqrt{4r^2\sin^2\alpha-h^2}$.
5. Ответ: $\left(\dfrac{8V\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{3-12\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\alpha<\frac{\pi}{3}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $10\ \text{км}/\text{ч}$.
2. Ответ: $\{3\}$.
3. а) Ответ: $\left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   б) Ответ: $a=\frac{169}{4}\pi^2$.
4. Ответ: $\dfrac{\sqrt{S^2+a^4\sin^4\alpha}}{2a\sin^2\alpha}$.
5. Ответ: $\left(\dfrac{S\sqrt{2\cos\alpha}}{8\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Химический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 20 г.
2. Ответ: $\{-1;\ 2\}$.
3. Ответ: $\left\{\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $AE=3\sqrt{3}$.
5. Ответ: $\frac{2r^3\sin^2\alpha}{3}\sqrt{3\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\alpha}$, $\alpha<\frac{2\pi}{3}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 26%.
2. Ответ: $\left\{\frac{1}{2};1\right\}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $AB=\sqrt{7}$.
5. Ответ: $\frac{4r^3\sin^2 2\alpha}{3}\sqrt{4\sin^2\alpha-2\sin^2 2\alpha}$, $\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Геологический факультет
географический факультет,

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 182 г.
2. а) Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{3}}{8}\right\}$.

   б) Ответ: $\{3\}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4};\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{12}{5}\right),\ \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)$.
5. а) Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

   б) Ответ: $[2;\,3)\cup(3;\,4)\cup(4;\,+\infty)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 84 г.
2. а) Ответ: $\left\{\frac{27}{\sqrt{2}}\right\}$.

   б) Ответ: $\{-1\}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\ (-1)^{k}\frac{\pi}{30}+\frac{\pi k}{5} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: 16 см, 30 см, 34 см..
5. а) Ответ: $\frac{h^2\sqrt{3}}{18}$.

   б) Ответ: $[1;\,2)\cup(2;\,3)\cup(3;\,+\infty)$.

Филологический факультет
(отделение математической лингвистики)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $14\ \text{км}/\text{ч}$; $2\ \text{км}/\text{ч}$.
2. Ответ: $\{3\}$.
3. Ответ: $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{8} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$.
4. Ответ: 2.
5. Ответ: $\arccos(-\cos^2\alpha)$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 2400 км; $800\ \text{км}/\text{ч}$; $480\ \text{км}/\text{ч}$.
2. Ответ: $\{-3\}$.
3. Ответ: $\left[0; \arccos\left(\frac{\sqrt{6}-1}{2}\right)\right)$.
4. Ответ: 32.
5. Ответ: $\arccos\left(\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Факультет психологии,
экономический факультет

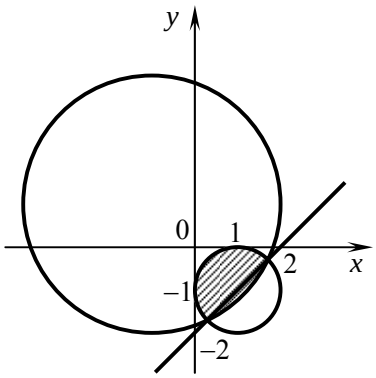
Ответы к варианту 1

1. Ответ: 3 часа.
2. а) Ответ: $\{3\}$.

   б) Ответ: $\{9\}$.
3. а) Ответ: $\left(0; \frac{1}{\sqrt{10}}\right] \cup [10; +\infty)$.

   б) Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$.
5. а) Ответ: $H \cos\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

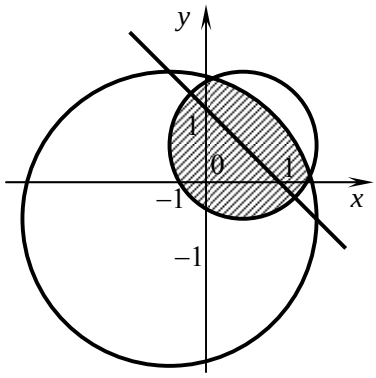
   б) Ответ: см. рисунок.



Ответы к варианту 2

1. Ответ: 4 часа.
2. а) Ответ: $\{5\}$.

   б) Ответ: $\{6\}$.
3. а) Ответ: $(0; 1] \cup [100; +\infty)$.

   б) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\frac{x^2+y^2}{y}$, $\frac{x^2+y^2}{x}$.
5. а) Ответ: $R\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

   б) Ответ: см. рисунок.