

**Санкт-Петербургский государственный университет, 1992 год**  
математико-механический факультет,  
факультет прикладной математики – процессов управления

**Вариант 1**

1. Из одного пункта выходят три дороги под углом  $120^\circ$  друг к другу. Одновременно из него выходят три пешехода с постоянными скоростями, образующими арифметическую прогрессию. Через 2 часа расстояние между самым медленным и самым быстрым пешеходами равнялось  $2\sqrt{76}$  км, а между самым медленным и третьим пешеходом —  $2\sqrt{61}$  км. Найдите скорости пешеходов.
2. Решите уравнение  $3 - 4\sin x = \sqrt{2\sin x - 1}$ .
3. Найдите все вещественные значения параметра  $a$  такие, при которых неравенство  $a(2 + \sin^2 x)^4 + \cos^2 x + a > 11$  выполняется для всех  $x$ .
4. Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Диаметр круга совпадает с большим катетом. Вычислите площади частей круга, на которые он разбивается гипотенузой треугольника.
5. Дан цилиндр объема  $V$ . Определите его высоту и радиус основания, при которых периметр осевого сечения цилиндра имеет наименьшее значение.

**Вариант 2**

1. Из вершины правильной треугольной пирамиды с плоским углом  $60^\circ$  при вершине одновременно начинают движение вдоль боковых ребер три точки с постоянными скоростями, образующими арифметическую прогрессию. Вычислите скорости движения точек, если известно, что через три секунды после начала движения расстояние между самой быстрой и самой медленной точкой равнялось  $3\sqrt{37}$  см, а расстояние между самой быстрой и третьей точкой равнялось  $3\sqrt{39}$ .
2. Решите уравнение  $\sqrt{13 - 18\operatorname{tg} x} = 6\operatorname{tg} x - 3$ .
3. Найдите все вещественные значения параметра  $a$  такие, при которых неравенство  $a(3 - \cos^2 x)^3 - \sin^2 x + a < 5$  выполняется для всех  $x$ .
4. Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Диаметр окружности совпадает с меньшим катетом. Вычислите длины дуг окружности, на которые она разбивается гипотенузой треугольника.
5. Периметр осевого сечения цилиндра равен  $p$ . Вычислите наибольшее значение объема цилиндра.

**Санкт-Петербургский государственный университет, 1992 год**  
факультет психологии,  
филологический факультет  
(отделение математической лингвистики)

**Вариант 1**

1. Из одного пункта выходят две дороги под углом  $60^\circ$  друг к другу. Сначала по одной из них выходит первый пешеход, а через один час по другой дороге — второй. Их скорости постоянны. Через два часа после выхода второго пешехода расстояние между ними равнялось  $\sqrt{73}$  км, а еще через час — 12 км. Найдите скорости пешеходов.
2. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} 2^{x+y} = 2^x + 2^y, \\ \sqrt{2^x - 2^y} = \sqrt{2^x} - \sqrt{2^y}. \end{cases}$$
3. Среди всех решений уравнений  $\sin x + \cos x = \sin ax$ , где  $a$  — произвольное вещественное число, найдите наименьшее положительное.
4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению  $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ .
5. Вершины острых углов прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 лежат на полуокружности, а больший катет лежит на диаметре полуокружности. Вычислите длины дуг, на которые полуокружность разбивается гипотенузой треугольника.

**Вариант 2**

1. По двум дорогам, угол между которыми равен  $45^\circ$ , два пешехода начинают движение одновременно по направлению к точке пересечения дорог. Их скорости постоянны. В начальный момент расстояние между пешеходами равнялось  $\sqrt{17}$  км, а через час —  $\sqrt{10}$  км. Найдите скорости пешеходов, если известно, что один пешеход достиг точки пересечения дорог за 4 часа, а второй — за 5 часов.
2. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} 3^{x+y} = 3^x + 3^2 - 3^y, \\ \sqrt{3^x - 3^y} = \sqrt{3^x} - \sqrt{3^y}. \end{cases}$$
3. Среди всех решений уравнения  $\sin x - \cos x = \cos ax$ , где  $a$  — произвольное вещественное число, найдите наибольшее отрицательное.
4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению  $(x + |x|)^2 + (|y| - y)^2 = 9$ .
5. Вершины острых углов прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 лежат на полуокружности, а меньший катет лежит на диаметре полуокружности. Вычислите длины дуг, на которые полуокружность разбивается гипотенузой треугольника.

**Санкт-Петербургский государственный университет, 1992 год**  
экономический факультет,  
биолого-почвенный факультет

**Вариант 1**

1. Корни уравнения  $x^3 - 6x^2 + 3x + a = 0$  при некотором  $a$  образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.
2. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \lg(a+b) = \lg a + \lg b, \\ (a+b) \sin \pi = \sin \pi a + \sin \pi b. \end{cases}$$
3. а) Решите уравнение  $\frac{\sin x - \sqrt{\sin x}}{\cos x - \sqrt{\cos x}} = 1$  (МЭО).  
б) Решите уравнение  $\sqrt{1 - \sin 2x} - \sin x = 0$  (все остальные специальности).
4. а) Постройте график функции  $f(x) = x^2 - |x - x^2|$  (биология, политэкономика).  
б) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство  $3 - |x - a| > x^2$  имеет хотя бы одно отрицательное решение (все остальные специальности).
5. Вершины куба с ребром 1 являются центрами шаров одинакового радиуса. Объем части куба, расположенной вне шаров, равен  $\frac{1}{2}$ . Какая часть ребра куба лежит вне шаров?

**Вариант 2**

1. Корни уравнения  $x^3 + 3x^2 + ax - 8 = 0$  при некотором  $a$  образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.
2. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \lg(a-b) = \lg a - \lg b, \\ (a-b) \sin \pi = \sin \pi a - \sin \pi b. \end{cases}$$
3. а) Решите уравнение  $\frac{\sqrt{\cos x} - \cos x}{\sqrt{\sin x} - \sin x} = 1$  (МЭО).  
б) Решите уравнение  $\sqrt{1 - \sin 2x} + \cos x = 0$  (все остальные специальности).
4. а) Постройте график функции  $f(x) = x^2 + |x + x^2|$  (биология, политэкономика).  
б) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство  $2 > |x + a| + x^2$  имеет хотя бы одно положительное решение (все остальные специальности).
5. Дан куб с ребром 1. Вычислите площадь полной поверхности тела, получающегося после удаления шаров радиуса  $\frac{1}{3}$  с центрами в вершинах куба.

**Санкт-Петербургский государственный университет, 1992 год**  
физический факультет,  
геологический факультет,  
факультет географии и геоэкологии

**Вариант 1**

1. Постройте график функции  $y = 2|\lg|x| - |2 + \lg x^2||$ .
2. Решите уравнение  $\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}} = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}$ .
3. Решите неравенство  $\frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}$ .
4. Около окружности радиуса  $R$  описана прямоугольная трапеция площади  $S$ . Вычислите острый угол трапеции.
5. Диаметр шара совпадает с высотой конуса и объема конуса и шара равны. Вычислите отношение длины линии пересечения поверхности шара и боковой поверхности конуса к длине окружности основания конуса.

**Вариант 2**

1. Постройте график функции  $y = 4\log_2|x| - |4 - \log_2 x^4|$ .
2. Решите уравнение  $\sqrt{\frac{1}{2} + \cos x} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sin x}$ .
3. Решите неравенство  $\frac{1 + \log_3 x}{1 - \log_9 x} \geq 4$ .
4. Дан периметр  $p$  прямоугольной трапеции, описанной около окружности радиуса  $R$ . Вычислите острый угол трапеции.
5. Диаметр шара совпадает с высотой правильной четырехугольной пирамиды. Объемы шара и пирамиды равны. Вычислите отношение площади сечения пирамиды плоскостью, содержащей точки пересечения ее боковых ребер с поверхностью шара, к площади основания пирамиды.

**Вариант 1**

1. Футбольное поле прямоугольной формы имеет площадь 0,64 га при ширине поля, лежащей в пределах от 50 до 55 метров. При каких размерах поля его диагональ будет наибольшей?
2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству  $\log_{2-|x|}(x^2 + y^2) \geq \log_{2-|x|} 5$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1, \\ x^2 + y^2 = \frac{9}{16} \pi^2. \end{cases}$$
4. Решите неравенство  $\log_2 x \leq \frac{2}{\log_2 x - 1}$ .
5. В прямоугольном треугольнике даны две неперпендикулярные друг другу высоты  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Вычислите радиус описанной около треугольника окружности.

**Вариант 2**

1. Вокруг футбольного поля прямоугольной формы площадью 0,64 га идет круговая дорожка. Длина футбольного поля лежит в пределах от 100 до 110 метров. При каких размерах поля длина дорожки имеет наименьшее возможное значение?
2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству  $\log_{|x|-1}(x^2 + y^2) \geq \log_{|x|-1} 5$ .
3. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 y = 1, \\ x^2 + y^2 = \frac{16}{25} \pi^2. \end{cases}$$
4. Решите неравенство  $\frac{\lg^2 x - 3 \lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$ .
5. В прямоугольном треугольнике даны две перпендикулярные друг другу высоты  $a$  и  $b$ . Вычислите радиус вписанной в треугольник окружности.

**Вариант 1**

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству  $y - x = |x^2 - y^2|$ .
2. Решите неравенство  $\frac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \leq 2$ .
3. Решите уравнение  $\sqrt{\frac{\pi}{6} - \sin x} = \sqrt{\frac{\pi}{6} + \cos x}$ .
4. В трапеции основания равны  $a$  и  $b$ , а одна из диагоналей перпендикулярна основаниям. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников, на которые трапеция разбивается этой диагональю.
5. Периметр осевого сечения конуса равен  $p$ . Найдите угол при вершине осевого сечения, для которого объем конуса максимален.

**Вариант 2**

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению  $x + y = |y^2 - x^2|$ .
2. Решите неравенство  $\log_{2x+3} x^2 < 1$ .
3. Решите уравнение  $\sqrt{\frac{1}{2} + \sin \frac{\pi}{3} x} = \sqrt{\frac{1}{2} + \cos \frac{\pi}{3} x}$ .
4. В прямоугольной трапеции один из углов равен  $45^\circ$ , а высота и меньшее основание равны  $a$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников, на которые трапеция разбивается меньшей диагональю.
5. Объем конуса равен  $V$ . Найдите отношение радиуса основания конуса к его высоте, при котором площадь боковой поверхности конуса наименьшая.

### Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,  
факультет прикладной математики – процессов управления

### Ответы к варианту 1

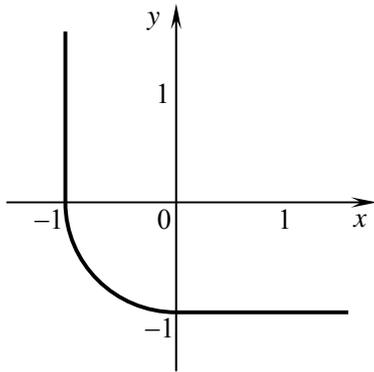
1. Ответ: 4 км/ч, 5 км/ч, 6 км/ч.
2. Ответ:  $\left\{(-1)^k \arcsin \frac{5}{8} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .
3. Ответ:  $\left(\frac{10}{17}; +\infty\right)$ .
4. Ответ:  $2\pi + \frac{84}{25} + 4 \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ ;  $2\pi - \frac{84}{25} - 4 \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ .
5. Ответ:  $h = r = \frac{\sqrt[3]{\pi V}}{\pi}$ .

### Ответы к варианту 2

1. Ответ: 3, 5, 7 или  $\frac{15}{\sqrt{7}}$ ,  $\frac{16}{\sqrt{7}}$ ,  $\frac{17}{\sqrt{7}}$ .
2. Ответ:  $\left\{\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .
3. Ответ:  $\left(-\infty; \frac{3}{14}\right)$ .
4. Ответ:  $\frac{3\pi}{2} - 3 \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ ;  $\frac{3\pi}{2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ .
5. Ответ:  $\frac{\pi p^3}{216}$ .

**Ответы к варианту 1**

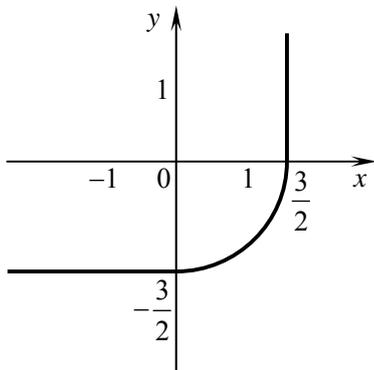
1. Ответ: 3 км/ч, 4 км/ч.
2. Ответ:  $\{(1; 1)\}$ .
3. Ответ:  $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ .
4. Ответ: см. рисунок.



5. Ответ:  $\frac{25}{4} \operatorname{arctg} \frac{3}{4}; \frac{25\pi}{8} - \frac{25}{4} \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ .

**Ответы к варианту 2**

1. Ответ: 1 км/ч,  $\sqrt{2}$  км/ч.
2. Ответ:  $\{(1; 1)\}$ .
3. Ответ:  $\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$ .
4. Ответ: см. рисунок.



5. Ответ:  $\frac{25}{3} \operatorname{arctg} \frac{4}{3}; \frac{25\pi}{6} - \frac{25}{3} \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ .

**Ответы к варианту 1**

1. Ответ:  $\{(-1; 2; 5); (5; 2; -1)\}$ .

2. Ответ:  $\left\{ \left( 2m; \frac{2m}{2m-1} \right); \left( \frac{2m-1}{2m}; 2m \right); \left( k-t; \frac{2k}{k-t} \right); \left( k+t; \frac{2k}{k+t} \right) : t = \sqrt{k^2 - 2k}, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\}$ .

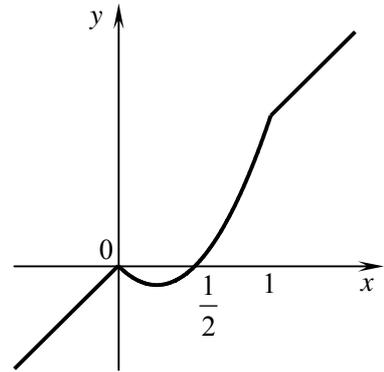
3. а) Ответ:  $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

б) Ответ:  $\left\{ \arctg \frac{1}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

4. а) Ответ:  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus [0; 1], \\ 2x^2 - x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$  (см. рисунок).

б) Ответ:  $\left( -\frac{13}{4}; 3 \right)$ .

5. Ответ:  $1 - \frac{\sqrt[3]{3\pi}}{\pi}$ .



**Ответы к варианту 2**

1. Ответ:  $\{(2; -1; -4); (-4; -1; 2)\}$ .

2. Ответ:  $\left\{ \left( \frac{4k^2}{2k-1}; \frac{2k}{2k-1} \right); \left( \frac{4k^2}{2k-1}; 2k \right); (2m; m-t); (2m; m+t) : t = \sqrt{m^2 - 2m}, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, k \in \mathbb{N} \right\}$ .

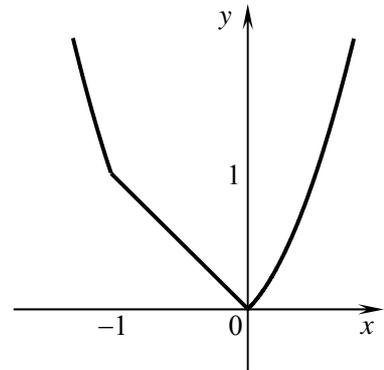
3. а) Ответ:  $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

б) Ответ:  $\{\pi + 2\pi k; \pi + \arctg 2 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ .

4. а) Ответ:  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 0], \\ -x, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$  (см. рисунок).

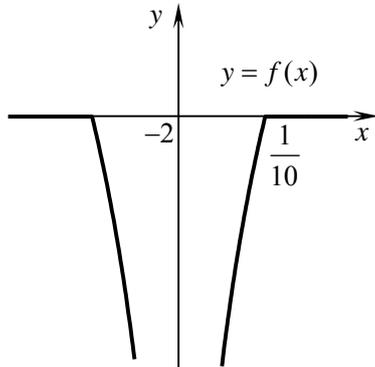
б) Ответ:  $\left( -\frac{9}{4}; 2 \right)$ .

5. Ответ:  $6 - \frac{2\pi}{9}$ .



**Ответы к варианту 1**

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ:  $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

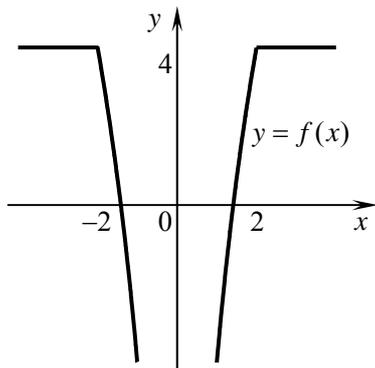
3. Ответ:  $\left( 0; \frac{1}{2} \right) \cup [2; +\infty)$ .

4. Ответ:  $\arcsin\left(\frac{2r^2}{3-2r^2}\right)$ .

5. Ответ:  $\frac{2}{3}$ .

**Ответы к варианту 2**

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ:  $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

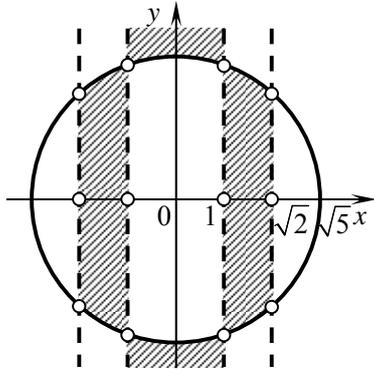
3. Ответ:  $[3; 9)$ .

4. Ответ:  $\arcsin\left(\frac{4R}{p-4R}\right)$ .

5. Ответ:  $\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)^{-2}$ .

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 50 м, 128 м.
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ:  $\left\{ \left( \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}; \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \right); \left( \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}; -\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \right); \left( -\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}; \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \right); \left( -\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}; -\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \right); \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}; \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \right); \right.$   
 $\left( -\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}; \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \right); \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}; -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \right); \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}; -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \right); \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}; \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \right);$   
 $\left. \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}; \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \right); \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}; -\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \right); \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}; -\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \right) \right\}$
4. Ответ:  $\left( 0; \frac{1}{2} \right] \cup (2; 4]$ .
5. Ответ:  $\frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$ .

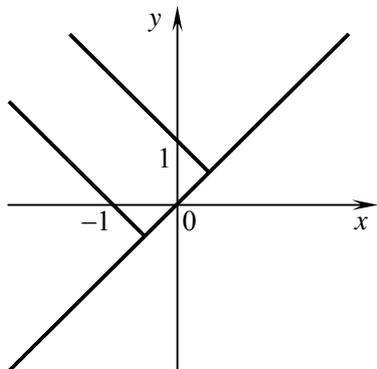
Ответы к варианту 2

1. Ответ: 64 м, 100 м.
2. Ответ: .

3. Ответ:  $\left\{ \left( \frac{4\pi}{5\sqrt{2}}; \frac{4\pi}{5\sqrt{2}} \right); \left( -\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}; \frac{4\pi}{5\sqrt{2}} \right); \left( \frac{4\pi}{5\sqrt{2}}; -\frac{4\pi}{5\sqrt{2}} \right); \left( -\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}; -\frac{4\pi}{5\sqrt{2}} \right); \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{7}\pi}{10}; \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{7}\pi}{10} \right); \right.$   
 $\left( -\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{7}\pi}{10}; \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{7}\pi}{10} \right); \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{7}\pi}{10}; -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{7}\pi}{10} \right); \left( -\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{7}\pi}{10}; -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{7}\pi}{10} \right); \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{7}\pi}{10}; \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{7}\pi}{10} \right);$   
 $\left. \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{7}\pi}{10}; \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{7}\pi}{10} \right); \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{7}\pi}{10}; -\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{7}\pi}{10} \right); \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{7}\pi}{10}; -\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{7}\pi}{10} \right) \right\}$ .
4. Ответ: (0; 10).
5. Ответ:  $\frac{ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}$ .

**Ответы к варианту 1**

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ:  $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$ .

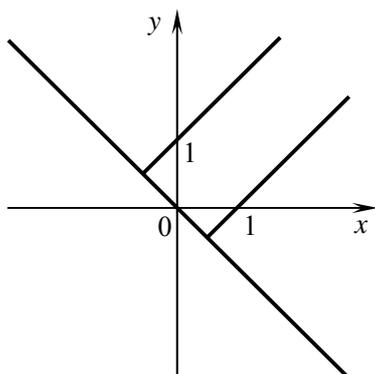
3. Ответ:  $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

4. Ответ:  $\frac{a+b}{2}$ .

5. Ответ:  $2 \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

**Ответы к варианту 2**

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ:  $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$ .

3. Ответ:  $\left\{\frac{3}{4} + 6k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

4. Ответ:  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ .

5. Ответ:  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .