Санкт-Петербургский государственный университет, 1994 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. При каких значениях параметра a найдутся вещественные числа x и y, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{2xy+a}=x+y+1$.
2. Решите неравенство $\log_{9x}3x+\log_{3x^2}9x^2\le\frac{5}{2}$.
3. Решите уравнение $\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x=\frac{1}{14}\cos 8x$.
4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает биссектрису угла B в точке Q. Докажите, что отрезки QP и OC параллельны.
5. Середины сторон основания правильной четырехугольной пирамиды объемом V служат вершинами основания правильной четырехугольной призмы объемом $\frac{3}{2}V$. Найдите объем общей части призмы и пирамиды.

Вариант 2

1. При каких значениях параметра a найдутся вещественные числа x и y, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{b-2xy}=y-x+2$.
2. Решите неравенство $\log_{4x}2x-\log_{2x^2}4x^2\ge-\frac{3}{2}$.
3. Решите уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{10}\cos 8x+\frac{11}{20}$.
4. Дан треугольник ABC. Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. Докажите, что если отрезки OC и QP параллельны, то треугольник ABC — равнобедренный ($AB=BC$).
5. Середины сторон основания правильной треугольной пирамиды объемом V служат вершинами основания правильной треугольной призмы объемом $\frac{3}{4}V$. Найдите объем общей части призмы и пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1994 год
факультет психологии,
филологический факультет
(отделение прикладной лингвистики)

Вариант 1

1. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\sqrt{2xy+3}=x+y$.
2. Решите неравенство $\log_{9x}3x+\log_{3x^2}9x^2\le\frac{5}{2}$.
3. Найдите все решения уравнения $\sin^3x\cos x-\cos^3x\sin x=\frac{1}{14}\cos 8x$, лежащие на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.
4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает биссектрису угла B в точке Q. Докажите, что отрезки QP и OC параллельны.
5. Середины сторон основания правильной четырехугольной пирамиды объемом V служат вершинами основания правильной четырехугольной призмы объемом $\frac{1}{2}V$. Найдите объем общей части призмы и пирамиды.

Вариант 2

1. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x-y=\sqrt{x^2+y^2-2}$.
2. Решите неравенство $\log_{4x}2x-\log_{2x^2}4x^2\ge-\frac{3}{2}$.
3. Найдите все решения уравнения $\sin^4x+\cos^4x=\frac{1}{10}\cos 8x+\frac{11}{20}$, лежащие на отрезке $[0;2\pi]$.
4. Дан треугольник ABC. Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. Докажите, что если отрезки OC и QP параллельны, то треугольник ABC — равнобедренный ($AB=BC$).
5. Середины сторон основания правильной треугольной пирамиды объемом V служат вершинами основания правильной треугольной призмы объемом $\frac{1}{2}V$. Найдите объем общей части призмы и пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1994 год
биолого-почвенный факультет,
экономический факультет
(отделение экономической кибернетики (ЭКИБ) и школа менеджмента (ШМ))

Вариант 1

1. Гражданин положил в банк определенную сумму денег под постоянный месячный процент, рассчитывая получить за год доход 900 тыс. руб. Через полгода ему пришлось снять со счета 400 тыс. руб. Какова была величина исходного вклада, если в конце года сумма на счете составила 2 млн. руб.?
2. Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq \frac{1}{2-x}$.
3. а) Решите уравнение $\arccos\left(\frac{3}{4}-x\right) = 2\arcsin x$ (биологический факультет, ШМ).

   б) Решите уравнение $\arccos x = \frac{2}{3}\arcsin 2x$ (отделение экономической кибернетики).
4. Решите уравнение $\log_3(3^x-1)\cdot\log_9(3^{x+1}-3)=3$.
5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром $AB=a$. Найдите объем общей части пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной A' и пирамиды с основанием $A'B'C'D'$ и вершиной A.

Вариант 2

1. Пенсионерка поместила в сбербанк некоторую сумму денег под фиксированный процент месячного дохода. Она планировала получить за год 165 тыс. руб. дохода, но через полгода сняла с книжки 100 тыс. руб. Найдите исходную сумму вклада.
2. Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{2-x}} \geq \frac{1}{1+x}$.
3. а) Решите уравнение $\arccos\left(\frac{1}{2}+x\right) = 2\arcsin x$ (биологический факультет, ШМ).

   б) Решите уравнение $\arccos x = \frac{3}{2}\arccos\frac{x}{2}$ (отделение экономической кибернетики).
4. Решите уравнение $\log_2(2^x+2)\cdot\log_4(2^{x-1}+1)=6$.
5. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром $BC=b$. Точки P и Q — середины ребер $A'B'$ и $C'D'$ соответственно. Найдите объем общей части двух пирамид с общим основанием $ABCD$ и вершинами P и Q.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1994 год
физический факультет,
геологический факультет,
факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x) = x\sqrt{2} - \sqrt{x^2 - |x^2 - 1| + 1}$.
2. Решите уравнение $\log_x 100 + \dfrac{1}{6} = \lg x$.
3. Решите уравнение $\sin x = \dfrac{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}}{4}$.
4. Высота делит прямоугольный треугольник на два треугольника, площади которых равны 96 см^2 и 54 м. Найдите периметр исходного треугольника.
5. Шар касается трех граней и трех ребер куба с центром *a*. Найдите радиус шара.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 4 - |x^2 - 4|} - 2\sqrt{2}x$.
2. Решите уравнение $\log_x 1000 = \lg x + \dfrac{2}{15}$.
3. Решите уравнение $4\cos x = \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2 x}$.
4. Высота делит прямоугольный треугольник на два треугольника, периметры которых равны 6 см и 8 см. Найдите площадь исходного треугольника.
5. Шар касается двух граней и одного ребра правильного тетраэдра с ребром *a*. Найдите радиус шара.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1994 год
химический факультет

Вариант 1

1. Изобразите на координатной плоскости *Oxy* множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 - y^2 = |x| - |y|$.
2. Решите уравнение $\log_4 x^2 = \log_2(6 - x^2)$.
3. Решите уравнение $\cos x + \cos 9x = \cos 5x + \cos 7x$.
4. Решите неравенство $\sqrt{2x^2 + 3} > 2x + 1$.
5. Около треугольника *ABC* описана окружность с центром в точке *O*. Найдите отношение площадей треугольников *OAC* и *BCO*, если известно, что $\angle BAC = 15°$, а $\angle ACB = 120°$.

Вариант 2

Вариант безвозвратно утерян.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1994 год
факультет социологии

Вариант 1

1. Из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода. Когда первый пешеход прошел четверть пути от *A* до *B*, второму до середины пути оставалось идти 1,5 км, а когда второй пешеход прошел половину пути от *B* до *A*, первый находился на расстоянии 2 км от второго. Найдите расстояние от *A* до *B*, если известно, что второй пешеход шел быстрее первого.
2. Решите уравнение $4\sin x+\sqrt{6-6\operatorname{tg}^2 x}=0$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x^2-7x+12)$.
4. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $ax+\sqrt{10-6x}=0$ имеет решение на отрезке $[-1; 1]$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* стороны основания *ABCD* равны *a*, а боковые грани наклонены к основанию под углом β, $\beta>45°$. Через ребро *AB* проведена плоскость, перпендикулярная грани *SCD*. Найдите объем пирамиды, отсекаемой этой плоскостью от исходной пирамиды.

Вариант 2

1. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта *A* в пункт *B*. Когда первый проехал треть пути, второму оставалось до середины пути ехать 2,5 км. Когда второй проехал половину пути, первый отставал от него на 3 км. Найдите расстояние от *A* до *B*.
2. Решите уравнение $4\cos x+\sqrt{2\operatorname{tg}^2 x-2}=0$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-10x+24) \leq \log_{\frac{1}{9}} x^2$.
4. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $ax+\sqrt{10+3x}=0$ имеет решение на отрезке $[-2; 2]$.
5. Дана правильная четырехугольная пирамида *SABCD*, у которой сторона основания равна *b*, а боковые грани наклонены к основанию под углом β. Через ребро *BC* и середину ребра *SD* проведена плоскость. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, отсекаемой этой плоскостью от исходной пирамиды.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.
2. Ответ: $\left(0;\frac{1}{27\sqrt{3}}\right]\cup\left(\frac{1}{9};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup[1;+\infty)$.
3. Ответ: $\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{4}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi k}{4} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $\frac{3}{4}V$.

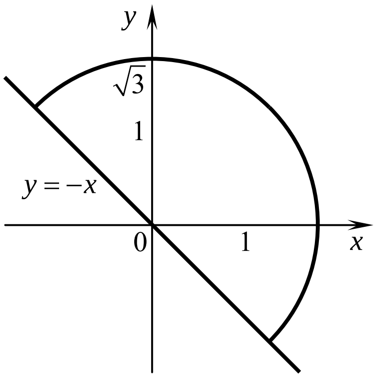
Ответы к варианту 2

1. Ответ: $[-2;+\infty)$.
2. Ответ: $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup[1;+\infty)$.
3. Ответ: $\left\{-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{\pi k}{2};\ \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $\frac{7}{15}V$.

Факультет психологии,
филологический факультет
(отделение прикладной лингвистики)

Ответы к варианту 1

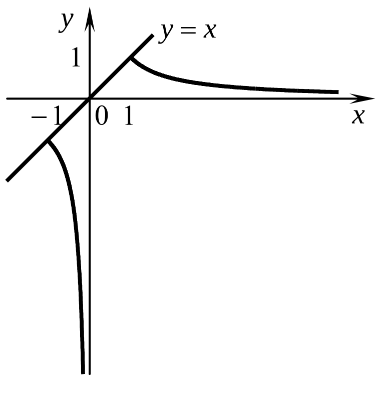
1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{27\sqrt{3}}\right] \cup \left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup [1;\ +\infty)$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{4};\ -\frac{1}{4}\arcsin\frac{1}{4}-\frac{\pi}{4}\right\}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $\frac{25}{54}V$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup [1;\ +\infty)$.
3. Ответ: $\left\{\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right);\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $\frac{65}{162}V$.

Биолого-почвенный факультет,
экономический факультет
(отделение экономической кибернетики (ЭКИБ) и школа менеджмента (ШМ))

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 1600000.
2. Ответ: $\left(-1;\,\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right]\cup(2;\,+\infty)$.
3. а) Ответ: $\left\{\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right\}$.

   б) Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
4. Ответ: $\left\{\log_3 10;\,\log_3\left(\dfrac{28}{27}\right)\right\}$.
5. Ответ: $\dfrac{a^3}{12}$.

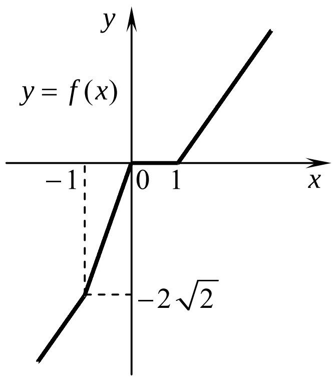
Ответы к варианту 2

1. Ответ: 375000.
2. Ответ: $(-\infty;\,-1)\cup\left[\dfrac{\sqrt{13}-3}{2};\,2\right)$.
3. а) Ответ: $\left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}$.

   б) Ответ: $\{-1\}$.
4. Ответ: $\{\log_2 7+1\}$.
5. Ответ: $\dfrac{5}{24}b^3$.

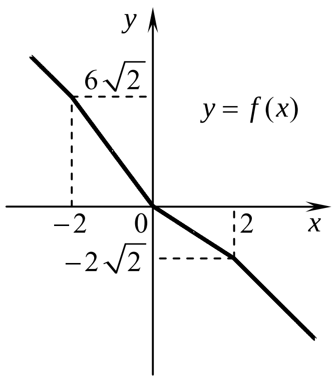
Физический факультет,
геологический факультет,
факультет географии и геоэкологии

Ответы к варианту 1



1. Ответ: $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{2}-\sqrt{2},\ x\in\mathbb{R}\setminus[-1;1],\\ 2x\sqrt{2},\ -1\le x\le 0,\\ 0,\ 0\le x\le 1\end{cases}$ (см. рисунок).
2. Ответ: $\left\{10\sqrt{10};\ \dfrac{1}{10\sqrt[3]{10}}\right\}$.
3. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{7\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{11\pi}{12}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: 60.
5. Ответ: $(2-\sqrt{2})a$.

Ответы к варианту 2

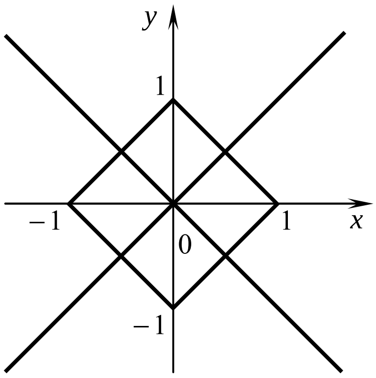


1. Ответ: $f(x)=\begin{cases} 2-2x\sqrt{2},\ x\in\mathbb{R}\setminus[-2;2],\\ (-1-2\sqrt{2})x,\ -2\le x\le 0,\\ (1-2\sqrt{2})x,\ 0\le x\le 2\end{cases}$ (см. рисунок).
2. Ответ: $\{10^{-\frac{9}{5}};\ 10^{\frac{5}{3}}\}$.
3. Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{12}+2\pi k;\ -\dfrac{5\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{12}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\dfrac{25}{6}$.
5. Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}b$.

Химический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\{-2; 2\}$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $(-\infty; \sqrt{2}-1)$.
5. Ответ: 2.

Ответы к варианту 2

Вариант безвозвратно утерян.

Факультет социологии

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 12.
2. Ответ: $\left\{(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(6;\ +\infty)$.
4. Ответ: $(-\infty;\ -2]\cup[4;\ +\infty)$.
5. Ответ: $-\dfrac{a^3}{24}\operatorname{tg}^2\beta\cdot\sin 4\beta$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 30.
2. Ответ: $\left\{-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 3)\cup(8;\ +\infty)$.
4. Ответ: $(-\infty;\ -2]\cup[1;\ +\infty)$.
5. Ответ: $\dfrac{3b^3(\sqrt{5+4\cos 2\beta}+3)}{16\cos\beta}$.