

Санкт-Петербургский государственный университет, 1996 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. Нарисуйте график функций $f(x) = \log_4(x^2 - 4x + 5 - |2x - 4|)$.
2. Решите уравнение $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}} = \frac{x - 3\sqrt{x-2} + 2}{9}$.
3. Решите уравнение $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 3 \sin x - \operatorname{tg} x$.
4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AN и CK . Известно, что площади треугольника AKC и ANC равны. Докажите, что AB равно BC .
5. Стенки сосуда образованы точками параболы $y = 2x^2$ при ее вращение вокруг оси симметрии. В вертикально стоящий сосуд бросили шар объемом $0,1$. Коснется ли шар сосуда?

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 2 - |2x - 2|)$.
2. Решите уравнение $\frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}} = \frac{x + 3\sqrt{x-2} + 3}{9}$.
3. Решите уравнение $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 5 \cos x - \operatorname{ctg} x$.
4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AN и CK . Известно, что $AK = CN$. Докажите, что $AB = BC$.
5. Стенки сосуда образованы точками параболы $y = \frac{x^2}{2}$ при ее вращение вокруг оси симметрии. В вертикально стоящий сосуд бросили шар объемом 4 . Коснется ли шар дна сосуда?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1996 год
биолого-почвенный факультет

Вариант 1

1. Сколько существует трехзначных чисел, делящихся на 12 или на 21?
2. Решите уравнение $\sqrt{3x^2 + 5x - 2} = 3x - 1$.
3. Решите уравнение $\log_{5+\frac{x}{2}} \sin x = \log_{9+8x-x^2} \sin x$.
4. Вершина O равностороннего треугольника ABO лежит внутри треугольника ABC . Найдите OC , если известно, что $AB = 1$, а площади треугольника AOC и BOC равны соответственно 3 и 5.
5. Решите уравнение $\sqrt{a \cos 2x + \cos^2 x} = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Вариант 2

1. Сколько существует чисел, делящихся на 15 или на 18?
2. Решите уравнение $\sqrt{5x + 3 - 2x^2} = 2x + 1$.
3. Решите уравнение $\log_{2x+7} \cos x = \log_{\frac{9x}{2}+13-x^2} \cos x$.
4. Дан равносторонний треугольник ABC и точка K вне него, причем отрезок CK пересекает сторону AB . Найдите CK , если известно, что площади треугольника AKC и BKC равны соответственно 4 и 1, а $AB = 1$.
5. Решите уравнение $\sqrt{b \cos 2x + \sin^2 x} = b$, $b \in \mathbb{R}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1996 год
филологический факультет
(отделение прикладной лингвистики),
школа менеджмента

Вариант 1

1. Три положительных числа, взятые в определенном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Если среднее из чисел уменьшить в 3 раза, то в том же порядке получится убывающая прогрессия. Найдите ее знаменатель.
2. Решите уравнение $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})(x - 3\sqrt{x-2} + 2) = 9$.
3. Решите уравнение $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + 3\sin x = \operatorname{tg} x$.
4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AN и CK . Докажите, что AB равно BC .
5. Найдите все действительные значения параметра b , при которых уравнение $\frac{3^{2x}}{9^x - 3^{x+1} + 2} = b$ имеет только одно решение.

Вариант 2

1. Три положительных числа, взятые в определенном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Если среднее из чисел уменьшить в 2 раза, то в том же порядке получится геометрическая прогрессия. Найдите ее знаменатель.
2. Решите уравнение $(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})(x + 3\sqrt{x-1} + 3) = 9$.
3. Решите уравнение $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + 5\cos x = \operatorname{ctg} x$.
4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AN и CK . Известно, что $AK = CN$. Докажите что $AB = CN$.
5. Найдите все действительные значения параметра a , при которых уравнение $\frac{2^{2x+1}}{4^x - 2^{x+1} + 3} = a$ имеет только одно решение.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1996 год
факультет психологии,
экономический факультет
(ММИОЭМ, БУ)

Вариант 1

1. а) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2 - 1}{x + y} = \left| 1 - \frac{x}{y} \right|$ (экономический факультет).
б) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2 - 1}{x + y} = \frac{|x - y|}{y}$ (факультет психологии).
2. Решите неравенство $\sqrt{3x^2 + 5x - 2} \leq 2 + x$.
3. Решите уравнение $\log_{5+\frac{x}{2}} \sin x = \log_{9+8x-x^2} \sin x$.
4. Вершина O равностороннего треугольника ABO лежит внутри треугольника ABC . Найдите OC , если известно, что $AB = 1$, а площади треугольника AOC и BOC равны соответственно 3 и 5.
5. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, и все боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами. Радиус сферы, описанной вокруг данной пирамиды, равен 7. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 2

1. а) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2 - 1}{x - y} = \left| 1 + \frac{x}{y} \right|$ (экономический факультет).
б) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2 - 1}{x - y} = \frac{|x + y|}{y}$ (факультет психологии).
2. Решите неравенство $\sqrt{5x - 2x^2 + 3} \leq 3 - x$.
3. Решите уравнение $\log_{2x+7} \cos x = \log_{\frac{9}{2}x+13-x^2} \cos x$.
4. Дан равносторонний треугольник ABC и точка K вне него, причем отрезок CK пересекает сторону AB . Найдите CK , если известно, что площади треугольника AKC и BKC равны соответственно 4 и 1, а $AB = 1$.
5. В сферу диаметром 15 вписана треугольная пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12, а все боковые ребра наклонены к плоскости основания под равными углами. Найдите высоту конуса, основание которого вписано в основание пирамиды, а вершина лежит на сфере.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1996 год
физический факультет,
геологический факультет,
факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \frac{4^{x+1} + 2^x - 3}{3 - 2^{x+2}}$.
2. Решите уравнение $\sin x \sin 3x = \frac{3}{2} \cos 2x$.
3. Решите уравнение $\sqrt{7-x} - 2x = 1$.
4. Дана немонотонная функция $f(x) = a|x-1| + bx + 2$, $a, b \in \mathbb{R}$. Найдите все пары чисел a и b такие, чтобы на отрезке $[0; 2]$ минимальное значение этой функции равнялось $\{-1\}$, а максимальное — $\{3\}$.
5. В окружность радиусом R вписана трапеция с острым углом α . Найдите площадь трапеции, если известно, что ее средняя линия равна m .

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \frac{3^{2x+1} - 5 \cdot 3^x + 2}{3^{x+1} - 2}$.
2. Решите уравнение $\cos x \cos 3x = \frac{3}{2} \cos 2x$.
3. Решите уравнение $\sqrt{6+x} + 2x = 3$.
4. Дана немонотонная функция $f(x) = a|x+1| + bx + 1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Найдите все пары чисел a и b такие, чтобы на отрезке $[-2; 0]$ минимальное значение этой функции равнялось $\{-2\}$, а максимальное — $\{2\}$.
5. В окружность радиусом R вписана трапеция с боковой стороной b и острым углом β . Найдите площадь трапеции.

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $f(x) = |1-x| - 2 + |2+x|$.
2. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 4x - 5} < \sqrt{3x - 5 + 2x^2}$.
3. Решите уравнение $\frac{3}{\cos 4x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.
4. Установите, при каком значении параметра a уравнение $\log_2(1-3x) + \log_2(2^a + x) = a$ имеет единственное решение, и найдите это решение.
5. Диагонали ромба равны a и b . Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

Вариант 2

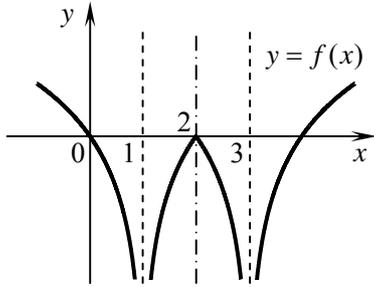
1. Нарисуйте график функции $f(x) = |1+x| + 2 - |2-x|$.
2. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 9x + 8} > \sqrt{2x + 8 - x^2}$.
3. Решите уравнение $\frac{2}{\cos 4x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$.
4. Установите, при каком значении параметра a уравнение $\log_3(1-2x) + \log_3(3^a + x) = a$ имеет единственное решение, и найдите это решение.
5. Окружности радиусов r и R касаются внешним образом. Прямая l является их общей внешней касательной. Найдите расстояние между точками прямой l с окружностями.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{ \frac{5+3\sqrt{5}}{2} \right\}$.

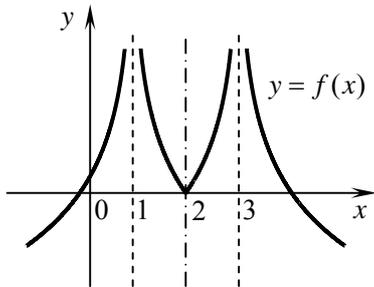
3. Ответ: $\left\{ (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Ответ: .

5. Ответ: нет.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{ \frac{3(1+\sqrt{5})}{2} \right\}$.

3. Ответ: $\left\{ (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Ответ: .

5. Ответ: да.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 108.

2. Ответ: $\left\{\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right\}$.

3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; 8\right\}$.

4. Ответ: $OC = \frac{28}{\sqrt{3}}$.

5. Ответ: при $a \in \left[0; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]: \left\{-\frac{1}{2}\arccos\frac{2a^2-1}{2a+1} + \pi k; \frac{1}{2}\arccos\frac{2a^2-1}{2a+1} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\};$

при $a \in \mathbb{R} \setminus \left[0; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]: \emptyset$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 100.

2. Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right\}$.

3. Ответ: $\left\{-\frac{3}{2}; 0; 2\pi\right\}$.

4. Ответ: $CK = 4\sqrt{7}$.

5. Ответ: при $b \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right] \cup \{0\}: \left\{-\frac{1}{2}\arccos\frac{2b^2-1}{2b-1} + \pi k; \frac{1}{2}\arccos\frac{2b^2-1}{2b-1} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\};$

при $b \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right] \cup \{0\}: \emptyset$.

Ответы к варианту 1

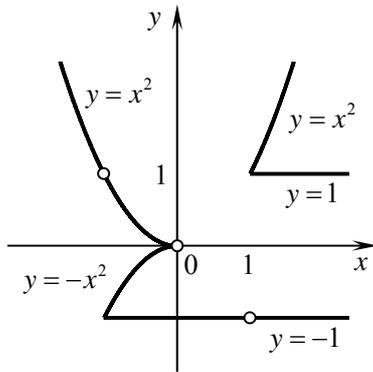
1. Ответ: $q = 3 - 2\sqrt{2}$.
2. Ответ: $\left\{ \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} \right\}$.
3. Ответ: $\left\{ (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $b \in (0; 1] \cup \{-8\}$.

Ответы к варианту 2

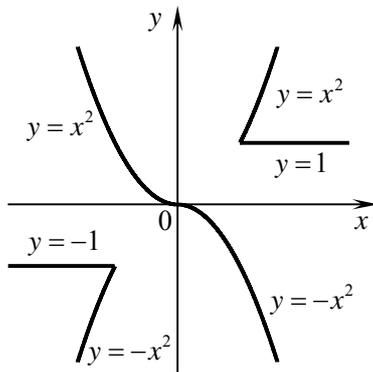
1. Ответ: $q = 2 + \sqrt{3}$.
2. Ответ: $\left\{ \frac{3(1 + \sqrt{5})}{2} \right\}$.
3. Ответ: $\left\{ (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{5} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $a \in (0; 2] \cup \{3\}$.

Ответы к варианту 1

1. а) Ответ: см. рисунок.



б) Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right] \cup \{-2\}$.

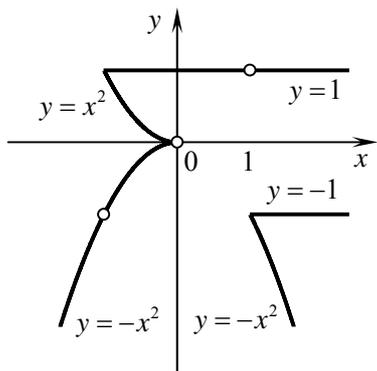
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; 8\right\}$.

4. Ответ: $OC = \frac{28}{\sqrt{3}}$.

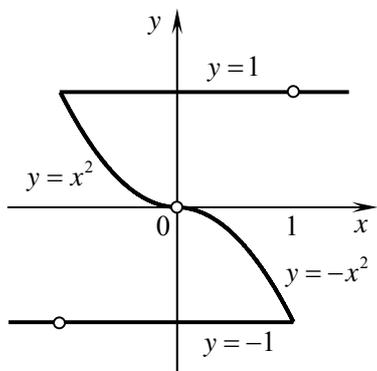
5. Ответ: $H = 2\sqrt{11} \pm 2\sqrt{6}$.

Ответы к варианту 2

1. а) Ответ: см. рисунок.



б) Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right] \cup \{3\}$.

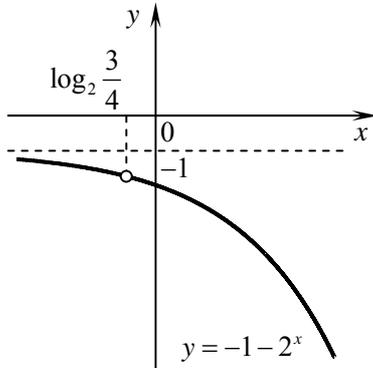
3. Ответ: $\left\{-\frac{3}{2}; 0; 2\pi\right\}$.

4. Ответ: $CK = 4\sqrt{7}$.

5. Ответ: $H = \sqrt{40} \pm \sqrt{14}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{ -\frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \pi k; \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

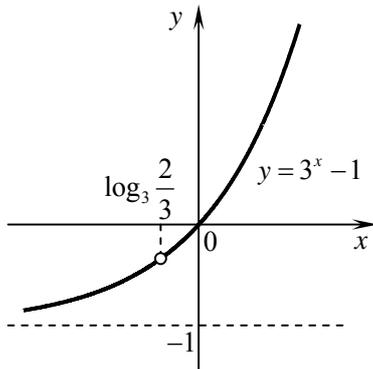
3. Ответ: $\left\{ \frac{3}{4} \right\}$.

4. Ответ: $\{(-3; 1)\}$.

5. Ответ: $S = m\sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha - m^2}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{ -\arccos \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \pi k; \arccos \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

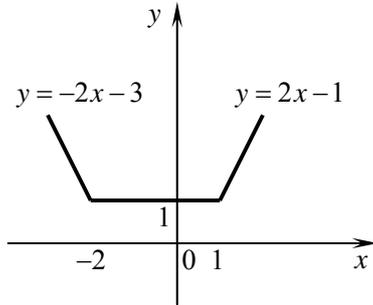
3. Ответ: $\left\{ \frac{1}{4} \right\}$.

4. Ответ: $\{(-3; -1)\}$.

5. Ответ: $S = c \sin^2 \alpha \sqrt{4R^2 - c^2}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $(-\infty; -7) \cup [5; +\infty)$.

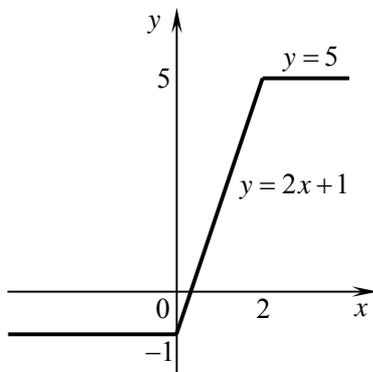
3. Ответ: $\left\{ (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{41}-3}{8} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Ответ: при $a = -\log_2 3$: единственный корень $x = 0$.

5. Ответ: $r = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $[-2; 0)$.

3. Ответ: $\left\{ -\frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi k; \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Ответ: при $a = -\log_3 2$: единственный корень $x = 0$.

5. Ответ: $d = 2\sqrt{R \cdot r}$.