

Санкт-Петербургский государственный университет, 1997 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. При каких значениях параметра a существует такое значение параметра r , что система
$$\begin{cases} 3|x| + |y| = 3, \\ (x-a)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$
 имеет ровно три решения?
2. Решите неравенство $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x)} > -1$.
3. Решите уравнение $(\sin x - \cos 6x)^2 + (\cos x + 6 \sin 6x)^2 = 0$.
4. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 35x} = 8$.
5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Найдите объем фигуры, состоящей из всех тех точек пирамиды, для которых расстояние до вершины S не больше расстояния до любой из вершин основания.

Вариант 2

1. При каких значениях параметра r существует такое значение параметра b , что система
$$\begin{cases} |x| + 2|y| = 2, \\ x^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{cases}$$
 имеет ровно три решения?
2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(4x - x^2) > 1$.
3. Решите уравнение $(\cos x + \cos 4x)^2 + (\sin x - 4 \sin 4x)^2 = 0$.
4. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 8x} = 5$.
5. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ со стороной основания 2 и боковым ребром 3. Найдите объем фигуры, состоящей из всех точек пирамиды, для которых расстояние до вершины S не больше расстояния до любой из вершин основания.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1997 год
факультет психологии,
экономический факультет
(математические методы и исследование операций в экономике — ММИОЭ,
бухгалтерский учет и аудит — БУ),
филологический факультет
(отделение прикладной лингвистики)

Вариант 1

1. После того, как двое рабочих выполнили половину задания, каждый из них увеличил свою производительность труда: один на 20%, другой — на 16%. В результате этого вторая половина задания была ими выполнена на день быстрее, чем первая. Уложились ли рабочие с выполнением задания в двухнедельный срок?
2. Решите неравенство $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x)} > -1$.
3. а) Найдите все значения параметра t , при которых уравнение $|\sin t - x \cos t| + x = 0$ имеет хотя бы одно решение на интервале $(-1; 1)$ (кроме БУ).
б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x - \cos 6x = 0, \\ \cos x + 6 \sin 6x = 0. \end{cases}$$
4. Решите уравнение $\frac{\sqrt{x+2} - x}{2-x} = \frac{4}{5}$.
5. а) В ромб $ABCD$ вписана окружность радиуса $\sqrt{3}$. Найдите сторону ромба, если известно, что $BK = 2\sqrt{7}$, где K — середина отрезка CD (кроме ММИОЭ).
б) Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Найдите объем фигуры, состоящей из всех тех точек пирамиды, для которых расстояние до вершины S не больше расстояния до любой из вершин основания (ММИОЭ).

Вариант 2

1. После того, как двое рабочих выполнили половину задания, каждый из них увеличил свою производительность труда: один на 25%, другой — на 30%. В результате этого вторая половина задания была выполнена на день быстрее, чем первая. Уложились ли рабочие с выполнением задания в недельный срок?
2. Решите неравенство $\log_{\frac{2}{3}}^2(4x - x^2) > 1$.
3. а) Найдите все значения параметра t , при которых уравнение $|\cos t + x \sin t| - x = 0$ имеет хотя бы одно решение на интервале $(-1; 1)$ (кроме БУ).
б) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \cos x + \cos 4x = 0, \\ \sin x - 4 \sin 4x = 0. \end{cases}$$
4. Решите уравнение $\frac{\sqrt{5x-4} - x}{4-x} = \frac{1}{2}$.
5. а) Площадь ромба $ABCD$ равна 4. Найдите его сторону, если известно, что $AF = \sqrt{5}$, где F — середина отрезка BC (кроме ММИОЭ).
б) В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Найдите объем фигуры, состоящей из всех тех точек пирамиды, для которых расстояние до вершины S не больше расстояния до любой из вершин основания (ММИОЭ).

Санкт-Петербургский государственный университет, 1997 год
физический факультет,
геологический факультет,
факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. По окружности радиуса R движутся в одинаковом направлении две материальные точки со скоростями V_1 и V_2 . Найдите расстояние между ними через время T , если известно, что они начали свое движение одновременно из диаметрально противоположных точек.
2. а) Решите уравнение $\sqrt{|5x-4|-5} = 2x-3$ (кроме геологического факультета).
б) Решите уравнение $\sqrt{5x-9} = 2x-3$ (геологический факультет).
3. Решите уравнение $\cos 4x + \frac{1}{2} = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.
4. Нарисуйте график функции $y = \log_2\left(\frac{x-1}{x}\right) + \log_4 x^2$.
5. Отрезок AB является гипотенузой прямоугольного треугольника ABC и стороной равностороннего треугольника ABD . Найдите отношение $\frac{AB}{CD}$, если известно, что $\angle BAC = \alpha$ и что отрезки AB и CD не пересекаются.

Вариант 2

1. По окружности радиуса R движутся в противоположных направлениях две материальные точки со скоростями V_1 и V_2 . Найдите расстояние между ними через время T , если известно, что они начали свое движение одновременно из одной и той же точки.
2. а) Решите уравнение $\sqrt{|5x-2|-\frac{3}{2}} = 2x-1$ (кроме геологического факультета).
б) Решите уравнение $\sqrt{5x-\frac{7}{2}} = 2x-1$ (геологический факультет).
3. Решите уравнение $\frac{1}{2} - \cos 4x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.
4. Нарисуйте график функции $y = \log_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + \log_9 x^2$.
5. Отрезок BC является одной из сторон равностороннего треугольника ABC и гипотенузой прямоугольного треугольника BCD . Найдите отношение $\frac{BC}{AD}$, если известно, что $\angle CBD = \beta$ и что отрезки BC и AD не пересекаются.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1997 год
химический факультет

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \frac{|1+x|-1}{|x|-x}$.
2. Решите неравенство $(1 + \log_3 x) \log_x 3 \geq 0$.
3. Решите уравнение $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x} = 2$.
4. Решите уравнение $(2 + \cos x) \sin 2x = (1 - \sin x)(1 - \cos 2x)$.
5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, диаметром которой является отрезок AB .
Найдите отношение $\frac{CD}{AC}$, если известно, что угол между прямыми AD и BC равен α .

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \frac{|1-x|+1}{|x|+x}$.
2. Решите неравенство $(1 - \log_2 x) \log_2 2 \leq 0$.
3. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2} = 1$.
4. Решите уравнение $(2 - \sin x) \sin 2x = (1 + \cos 2x)(\cos x - 1)$.
5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, диаметром которой является отрезок AC .
Найдите отношение $\frac{BD}{AC}$, если известно, что угол между прямыми AB и DC равен β .

Санкт-Петербургский государственный университет, 1997 год
факультет менеджмента

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x^2 - 6x} = a$ имеет единственное решение.
2. Решите неравенство $\frac{1}{\log_{8x} x} \geq \log_2 2x$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin(x + y) = \cos x + \cos y, \\ x - y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$
4. Решите уравнение $||2x + 2| - x| = 4x + 4$.
5. В треугольнике ABC с площадью 42 сторона AB равна 7. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности, если известно, что точка касания K делит сторону AB в отношении $\frac{1}{6}$.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра b , при которых уравнение $\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{4x - x^2} = b$ имеет единственное решение.
2. Решите неравенство $\frac{1}{\log_{27x} x} \geq \log_3 \frac{x}{3}$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin(x - y) = \cos x - \cos y, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$
4. Решите уравнение $||2x - 1| - x| = 4x - 2$.
5. В треугольнике ABC с площадью 10,5 сторона AB равна 10. Найдите отношение, в котором эта сторона делится точкой касания вписанной в треугольник окружности, если известно, что радиус этой окружности равен 1.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
Факультет прикладной механики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $a \in (19 - 6\sqrt{10}; 1) \cup \{4\}$.
2. Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\{-1\}$.
5. Ответ: $V = \frac{16\sqrt{11}}{165}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $r \in (0, 4\sqrt{5} - 8) \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$.
2. Ответ: $\left(0; \frac{6-\sqrt{33}}{3}\right) \cup (1; 3) \cup \left(\frac{6+\sqrt{33}}{3}; 4\right)$.
3. Ответ: $\{\pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.
4. Ответ: $\{1\}$.
5. Ответ: $V = \frac{27\sqrt{7}}{112}$.

Факультет психологии,
экономический факультет
(математические методы и исследование операций в экономике — ММИОЭ,
бухгалтерский учет и аудит — БУ),
филологический факультет
(отделение прикладной лингвистики)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: да, уложились.
2. Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.
3. а) Ответ: $t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right]$.
б) Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\{7\}$.
5. а) Ответ: 4 или $\frac{28}{3}$.
б) Ответ: $V = \frac{16\sqrt{11}}{165}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: нет, не уложились.
2. Ответ: $\left(0; \frac{6-\sqrt{33}}{3}\right) \cup (1; 3) \cup \left(\frac{6+\sqrt{33}}{3}; 4\right)$.
3. а) Ответ: $t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$.
б) Ответ: $\{\pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.
4. Ответ: $\{8\}$.
5. а) Ответ: 2 или $\frac{2\sqrt{41}}{3}$.
б) Ответ: $V = \frac{27\sqrt{7}}{112}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: искомое расстояние равно $2R \left| \cos \frac{T(V_1 - V_2)}{2R} \right|$.

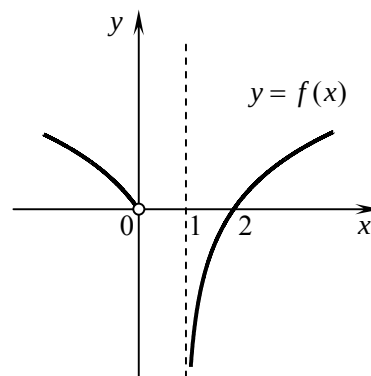
2. а) Ответ: $\left\{ 2; \frac{9}{4} \right\}$.

б) Ответ: $\left\{ 2; \frac{9}{4} \right\}$.

3. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{12} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Ответ: см. рисунок.

5. Ответ: $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{3} \cos \alpha \cdot \sin \alpha}}$.



Ответы к варианту 2

1. Ответ: искомое расстояние равно $2R \left| \sin \frac{T(V_1 + V_2)}{2R} \right|$.

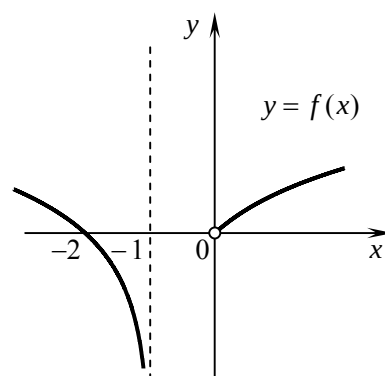
2. а) Ответ: $\left\{ \frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right\}$.

б) Ответ: $\left\{ \frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right\}$.

3. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

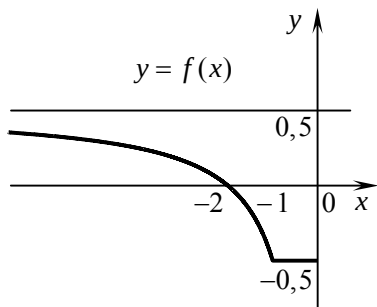
4. Ответ: см. рисунок.

5. Ответ: $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{3} \cos \beta \cdot \sin \beta}}$.



Ответы к варианту 1

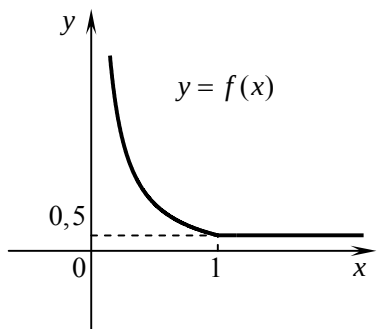
1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{2}{3}; 2\right\}$.
4. Ответ: $\left\{\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k; -2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $\frac{CD}{AB} = \cos \alpha$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $(0; 1) \cup [2; +\infty)$.
3. Ответ: $\left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$.
4. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi k; 2 \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $\frac{BD}{AC} = \cos \beta$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $a \in \{0\} \cup [\sqrt{15}; \sqrt{20})$.
2. Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right]$.
3. Ответ: $\left\{\left(\frac{5\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right); \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right); \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.
5. Ответ: $r = 2$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $b \in [-2; 0] \cup (0; 2\sqrt{2}]$.
2. Ответ: $\left(0; \frac{1}{27}\right) \cup \left[\frac{1}{27}; \frac{1}{3}\right] \cup (1; 27]$.
3. Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} - \pi k\right); \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right); \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} - 2\pi k\right); k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\left\{\frac{3}{5}\right\}$.
5. Ответ: искомое отношение есть 3:7.