

Санкт-Петербургский государственный университет, 1998 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. При каких значениях параметра a существует k , такое, что уравнение $||x - 2| - 2x + 1| = kx + a$ имеет ровно три решения?
2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x+3-2x^2}}{x+1} \geq \frac{\sqrt{2x+6-4x^2}}{3x-1}$.
3. Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2} + \sin x$.
4. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна S . Длины его сторон AB , BC , CD и DA в указанном порядке образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите ее разность, зная, что острый угол между диагоналями четырехугольника равен φ , а $AB = a$.
5. Найдите угол между гранями ABC и ABD треугольной пирамиды $ABCD$, если известно, что $\angle ABD = \angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \angle ABC = \beta$ и $AB = CD$.

Вариант 2

1. При каких значениях параметра b существует k , такое, что уравнение $||x + 2| + 2x| = kx + b$ имеет ровно три решения?
2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2x+6-8x^2}}{4x+3} \leq \frac{\sqrt{x+3-4x^2}}{4x+1}$.
3. Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2} - \cos x$.
4. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности радиуса r . Длины его сторон AB , BC , DA и CD в указанном порядке образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите ее разность, зная, что острый угол между диагоналями четырехугольника равен γ и $AB = b$.
5. В треугольной пирамиде $ABCD$ угол между гранями DAB и ABC равен φ . Найдите отношение $\frac{SC}{AB}$, если известно, что $\angle DAB = \angle ABC = \alpha$ и $\angle ADB = \angle ACB = \frac{\pi}{2}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1998 год
факультет географии и геоэкологии,
геологический факультет,
физический факультет

Вариант 1

1. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|y| - x^2 + x = y + |x^2 - x|$.
2. Решите уравнение $\sqrt{\frac{t}{t+1}} = \frac{\sqrt{2t^2+5t}}{t+2}$.
3. Решите неравенство $\log_x(1+x) \leq \log_{x^2}(4-3x-x^2)$.
4. Решите уравнение $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 3x + \sin x} = 0$.
5. Найдите площадь треугольника, вписанного в окружность радиуса 13 см, если известно, что периметр треугольника равен 60 см, а одна из сторон — 24 см.

Вариант 2

1. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|1-x^2| - y = 1-x^2 + |y|$.
2. Решите уравнение $\sqrt{\frac{t}{2t-5}} = \frac{\sqrt{t^2-t}}{2-t}$.
3. Решите неравенство $\log_x(4x-1) \geq \log_{x^2}(x+1-2x^2)$.
4. Решите уравнение $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos 3x - \cos x} = 0$.
5. Найдите периметр треугольника, вписанного в окружность радиуса 5 м, если известно, что одна из его сторон равна 8 м, а площадь треугольника равна 4 м^2 .

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_{x+1}(4|x| - a) = 2$ имеет ровно одно решение.
2. Решите неравенство $\sqrt{7-3x} > 2 + 2x$.
3. Решите систему
$$\begin{cases} \cos x \cos y \cos z = -\frac{1}{12}, \\ x + y + z = \pi, \\ \sin x \sin y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$
4. Найдите все значения x , при которых числа $|x-1|$, $3-x$, $3x-5$, расположенные в каком-либо порядке, образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше 2.
5. Окружность радиуса R касается трех сторон параллелограмма $ABCD$ и отрезка BM , где M — точка на стороне CD , отличная от C и D . Зная, что радиус окружности, вписанной в треугольник BCM , равен r , найдите, в каком отношении BM разбивает площадь параллелограмма.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_{1-x}(a + 6|x|) = 2$ имеет ровно одно решение.
2. Решите неравенство $\sqrt{4+3x} > 4 - 2x$.
3. Решите систему
$$\begin{cases} \sin x \sin y \sin z = \frac{1}{16}, \\ x + y + z = \frac{\pi}{2}, \\ \cos x \cos y = \frac{5}{8}. \end{cases}$$
4. Найдите все значения x , при которых числа $|x-2|$, $x+1$, $3-3x$, расположенные в каком-либо порядке, образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше 2.
5. Окружность радиуса R касается трех сторон параллелограмма $ABCD$ и отрезка AN , где N — точка на стороне BC , отличная от B и C . Найдите, в каком отношении N делит BC , если известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник ABN , равен r .

Санкт-Петербургский государственный университет, 1998 год
факультет психологии,
филологический факультет
(отделение теоретической и прикладной лингвистики)

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a , такие, что уравнение $||x - 2| - 2x + 1| = ax$ имеет ровно три решения?
2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2x^2 - x - 3}}{x + 1} = \frac{\sqrt{4x^2 - 2x - 6}}{3x - 1}$.
3. Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2} + \sin x$.
4. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна S . Длины его сторон AB , BC , CD и DA в указанном порядке образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите ее разность, зная, что острый угол между диагоналями четырехугольника равен φ , а $AB = a$.
5. Решить неравенство $\frac{1}{\log_{\frac{x}{3}} 27x} \leq \log_x 9x$.

Вариант 2

1. Найдите все значения параметра b , такие, что уравнение $||x + 2| + 2x| = bx$ имеет ровно три решения?
2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{8x^2 - 2x - 6}}{4x + 3} = \frac{\sqrt{4x^2 - x - 3}}{4x + 1}$.
3. Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2} - \cos x$.
4. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности радиуса r . Длины его сторон AB , BC , DA и CD в указанном порядке образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите ее разность, зная, что острый угол между диагоналями четырехугольника равен γ и $AB = b$.
5. Решить неравенство $\frac{1}{\log_{2x} 8x} \geq \log_x 16x$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1998 год
химический факультет

Вариант 1

1. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|y| \leq x - |2x - 2|$.
2. Решите уравнение $\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x-1}} = \sqrt{\frac{3x+1}{x+1}}$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} x^2 > \log_2(x+5)$.
4. Решите уравнение $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = \frac{1}{2}$.
5. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны по точке K и L соответственно. Медиана AM пересекает отрезок KL в точке D . Найдите отношение площадей треугольников DKM и DLM , зная, что $\frac{AK}{BK} = k$, $\frac{AL}{CL} = l$.

Вариант 2

1. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|y| \leq x - |x - 2|$.
2. Решите уравнение $\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$.
3. Решите неравенство $\log_9 x^2 + \log_3(x+4) < 1$.
4. Решите уравнение $\frac{1}{2} + \sin x = \cos x + \sin x \cos x$.
5. Вершины треугольника PQR лежат на сторонах треугольника ABC так: $P \in AB$, $Q \in AC$ и $R \in BC$. Прямая AR делит треугольник PQR на два равновеликих. Найдите отношение $\frac{BR}{CR}$, зная, что $\frac{AP}{BP} = p$ и $\frac{AQ}{CQ} = q$.

Вариант 1

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_x \left(ax + \frac{3}{2} \right) = -1$ имеет два решения.
2. Решите уравнение $2 - \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} = \sqrt{x+7}$.
3. Решите неравенство $\frac{|3-x| + |x+1|}{x} > \frac{3}{2}$.
4. Решите уравнение $2\sqrt{2} \sin x = 1 + 2\sqrt{3} \sin 2x$.
5. Окружность касается стороны AB параллелограмма $ABCD$, пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно и проходит через вершины C и D . Найдите DQ , зная, что $AP = a$, $BQ = b$ и $BC = c$.

Вариант 2

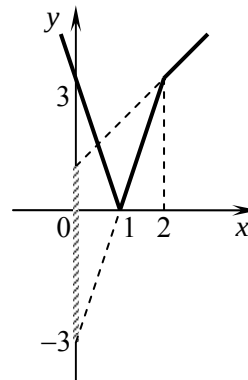
1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения $\log_x \left(ax + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$ имеет два решения.
2. Решите уравнение $3 - \sqrt{\frac{x+1}{x-6}} = \sqrt{x+11}$.
3. Решите неравенство $\frac{|6-2x| + |2x+1|}{x} > 3$.
4. Решите уравнение $2\sqrt{2} \cos x = 1 - 2\sqrt{3} \sin 2x$.
5. Окружность проходит через вершины A и B параллелограмма $ABCD$, пересекает стороны AD и BC в точках L и M соответственно и касается стороны CD . Найдите AD , зная, что $BL = l$, $LD = d$ и $MC = c$.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

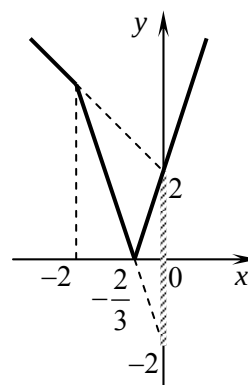
Ответы к варианту 1

1. Ответ: $a \in (-3; 1)$ (см. рисунок).
2. Ответ: $\left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $d = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 6S \operatorname{ctg} \varphi}}{3}$.
5. Ответ: $\varphi = 2 \arcsin \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta}$.



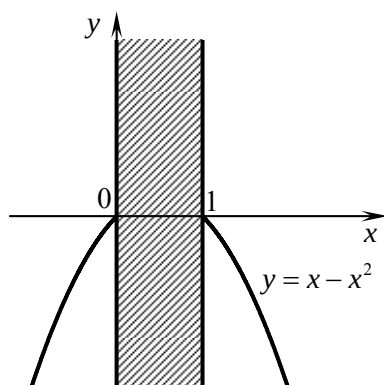
Ответы к варианту 2

1. Ответ: $b \in (-2; 2)$ (см. рисунок).
2. Ответ: $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1+2\sqrt{2}}{4}\right] \cup \{1\}$.
3. Ответ: $\left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $d = \frac{3r \operatorname{ctg} \gamma - \sqrt{9r^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma + 8br \operatorname{ctg} \gamma}}{2}$.
5. Ответ: $\frac{SC}{AB} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \sin^2 2\alpha}$.



Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\{0\}$.

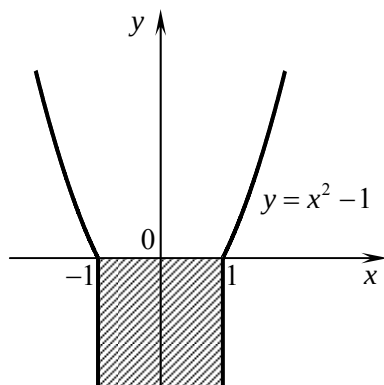
3. Ответ: $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

4. Ответ: $\left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Ответ: $S = 120$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\{0\}$.

3. Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

4. Ответ: $\left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Ответ: $8 + 6\sqrt{2}$, $8 + 4\sqrt{2}$.

Ответы к варианту 1

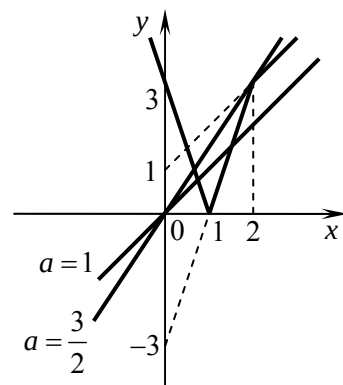
1. Ответ: $a \in (-\infty; -1] \cup (0; 4)$.
2. Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.
3. Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{6} + (n+m)\pi; \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{6} + (n-m)\pi; -\frac{2\pi}{3} + \pi - 2\pi n\right); \right. \\ \left. \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{6} + (n+m)\pi; -\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\arccos\frac{5}{6} + (n-m)\pi; \frac{2\pi}{3} + \pi - 2\pi n\right): m, n \in \mathbb{Z}\right\}$
4. Ответ: $\left[1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.
5. Ответ: $\frac{S_{BMC}}{S_{BMDA}} = \frac{r}{2R-r}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $a \in (-6; -3] \cup [1; +\infty)$.
2. Ответ: $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.
3. Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + (k+l)\pi; \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + (k-l)\pi; -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right); \right. \\ \left. \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + (k+l)\pi; -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + (k-l)\pi; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right): k, l \in \mathbb{Z}\right\}$
4. Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right]$.
5. Ответ: $\frac{BN}{CN} = \frac{r}{R-r}$.

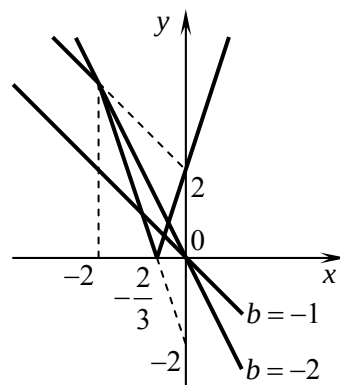
Ответы к варианту 1

1. Ответ: $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$ (см. рисунок).
2. Ответ: $\left\{\frac{3}{2}; \frac{5+4\sqrt{2}}{7}\right\}$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $d = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 6S \operatorname{ctg} \varphi}}{3}$.
5. Ответ: $\left(\frac{1}{27}; \frac{1}{3}\right] \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$.



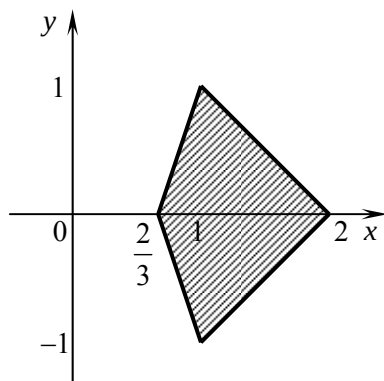
Ответы к варианту 2

1. Ответ: $b \in (-2; -1)$ (см. рисунок).
2. Ответ: $\{1\}$.
3. Ответ: $\left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $d = \frac{3r \operatorname{ctg} \gamma - \sqrt{9r^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma + 8br \operatorname{ctg} \gamma}}{2}$.
5. Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.



Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}; 2 + \sqrt{5}\right\}$.

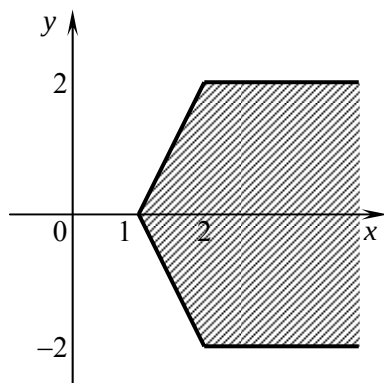
3. Ответ: $(-5; -4) \cup (-1; 0) \cup \left(0; \frac{\sqrt{41}-5}{2}\right)$.

4. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Ответ: $\frac{S_{DKM}}{S_{DLM}} = \frac{k(1+l)}{l(1+k)}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; -3 - 2\sqrt{3}\right\}$.

3. Ответ: $(-4; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; \sqrt{7}-2)$.

4. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Ответ: $\frac{BR}{CR} = \frac{(p+1)q}{(q+1)p}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $a \in \left(-\frac{9}{16}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
2. Ответ: $\left\{\frac{1-5\sqrt{5}}{2}\right\}$.
3. Ответ: $\left(0; \frac{8}{3}\right) \cup (4; +\infty)$.
4. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{12} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 2\pi k; \frac{\pi}{3} - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $DQ = c + \sqrt{ab}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $a \in \left(0; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 1\right)$.
2. Ответ: $\left\{\frac{5-7\sqrt{5}}{2}\right\}$.
3. Ответ: $\left(0; \frac{7}{3}\right) \cup (5; +\infty)$.
4. Ответ: $\left\{-\frac{7\pi}{12} + 2\pi k; \frac{\pi}{12} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $AD = l + \sqrt{cd}$.