

Санкт-Петербургский государственный университет, 2001 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления,
физический факультет

Вариант 1

1. Косцы должны выкосить два луга. Начав косить больший луг, они через два часа работы они разделились: часть осталась на первом лугу, а другая часть отправилась косить второй луг, площадью вдвое меньше первого и закончила работу одновременно с первой группой. Требуется определить, сколько косцов осталось работать на большом лугу, если известно, что один косец скашивает малый луг за три дня работы по восемь часов.
2. Решите уравнение $\frac{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x}{2 \sin 2x(2 \sin x - 1)} = \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x$.
3. а) Решите неравенство $\log_{x+a} 3 < \log_{x-a} 9$, при условии, что $0 < a < \frac{1}{8}$ (математико-механический факультет, факультет прикладной математики – процессов управления).
б) Решите неравенство $\log_{x+a} 3 < \log_{x-a} 9$, при условии, что $a > \frac{1}{8}$ (физический факультет).
4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. На биссектрисе угла A (внутри треугольника) выбрана точка O так, что площади треугольников AOB , AOC и BOC , взятые в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.
5. Найдите объем треугольной пирамиды, каждая грань которой представляет собой треугольник со сторонами $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$.

Вариант 2

1. Две бригады маляров красят два цеха. После 3 часов совместной работы в первом цехе вторая бригада перешла во второй цех, объем работы в котором вдвое меньше, чем в первом. Требуется определить, сколько маляров было во второй бригаде, если известно, что покраска обоих цехов была закончена одновременно, а один маляр может покрасить меньший цех за 6 дней, работая по 8 часов ежедневно.
2. Решите уравнение $\frac{\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1}{2 \sin 2x(2 \cos x - 1)} = \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x$.
3. а) Решите неравенство $\log_{x+a} 2 < \log_x 4$, при условии, что $0 < a < \frac{1}{4}$ (математико-механический факультет, факультет прикладной математики – процессов управления).
б) Решите неравенство $\log_{x+a} 2 < \log_x 4$, при условии, что $a > \frac{1}{4}$ (физический факультет).
4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$. На биссектрисе угла A (внутри треугольника) выбрана точка O так, что площади треугольников AOB , BOC и AOC , взятые в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.
5. Найдите объем треугольной пирамиды, каждая грань которой представляет собой треугольник со сторонами $\sqrt{13}$, $2\sqrt{5}$ и 5.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2001 год
биолого-почвенный факультет,
химический факультет,
филологический факультет
(теоретическая и прикладная лингвистика)

Вариант 1

1. Решите уравнение $2\sqrt{x^2-1} + \sqrt{2}x = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}x$.
2. Решите уравнение $\frac{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2\sin 2x(2\sin x-1)} = \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x$.
3. Решите неравенство $|\log_3(x-3)| - \log_3 x > 2$.
4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5$, $BC=8$, $AC=7$. На биссектрисе угла A (внутри треугольника) выбрана точка O так, что площади треугольников AOB , AOC и BOC , взятые в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.
5. Два насоса откачивают воду, равномерно поступающую в бак. Если включить первый насос, то бак опустеет за 3 часа, а если второй — то за 2 часа, а если оба сразу, то за 1 час. За какое время наполнится пустой бак, если выключить оба насоса?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\sqrt{y^2+2} - \frac{y}{\sqrt{2}} = \sqrt{y^2-2} + \frac{y}{\sqrt{2}}$.
2. Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 1}{2\sin 2x(2\cos x - 1)} = \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x$.
3. Решите неравенство $|\log_2(x-4)| - \log_2 x > 1$.
4. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5$, $BC=8$, $AC=7$. На биссектрисе угла A (внутри треугольника) выбрана точка O так, что площади треугольников AOB , BOC и AOC , взятые в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.
5. В бассейн по двум трубам поступает вода, которую откачивает один насос. Если открыть одну трубу, то пустой бассейн заполнится за 2 часа, если другую — то за 3 часа, а если обе — то за 1 час. За какое время наполнится пустой бассейн, если выключить насос и открыть обе трубы?

Санкт-Петербургский государственный университет, 2001 год
факультет географии и геоэкологии,
геологический факультет

Вариант 1

1. Постройте график функции $y = 2|\log_3(3-x)| + \log_3(3-x)^2$.
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y = xy + 2(\sqrt{2} - 1), \\ x^2 + y^2 = x^2y^2. \end{cases}$$
3. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 4x + 3} > x - 1$.
4. Решите уравнение $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \cos x} = 1$.
5. Вершина A квадрата $ABCD$ со стороной a лежит на окружности, касающейся сторон BC и CD . Найдите площадь части квадрата, лежащей внутри окружности.

Вариант 2

1. Постройте график функции $y = -2|\log_2(2+x)| - \log_2(2+x)^2$.
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + xy = 1, \\ xy(x+y) = -\frac{10}{9}. \end{cases}$$
3. Решите неравенство $\sqrt{4x^2 + 6x + 2} - \sqrt{4x^2 + 4x} > 2x + 2$.
4. Решите уравнение $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 + \cos x} = 1$.
5. Вершина A равностороннего треугольника ABC со стороной b лежит на окружности, касающейся стороны BC в ее середине. Найдите площадь части треугольника, лежащей внутри окружности.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2001 год
экономический факультет
(математические методы в экономике, прикладная информатика,
финансы и кредит, бухгалтерский учет, анализ и аудит)

Вариант 1

1. Два города A и B лежат по одну сторону от прямолинейной дороги на расстоянии 60 км и 200 км от нее. Перевозка груза по дороге обходится вдвое дешевле, чем по любому пути вне дороги. Как следует двигаться, чтобы затраты на перевозку груза из A в B были минимальными, если известно, что расстояние между городами равно 500 км?
2. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y = xy + 2(\sqrt{2} - 1), \\ x^2 + y^2 = x^2 y^2. \end{cases}$$

б) Найдите значение параметра a , при котором сумма корней трехчлена $x^2 + (a^2 - 2a)x + (a + 1)^2$ принимает наибольшее значение (для специальности математические методы в экономике).
3. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 4x + 3} > x - 1$.
4. Решите уравнение $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \cos x} = 1$.
5. Вершина A квадрата $ABCD$ со стороной a лежит на окружности, касающейся сторон BC и CD . Найдите площадь части квадрата, лежащей внутри окружности.

Вариант 2

1. Требуется перевести груз из города A в город B , расположенный по ту же сторону от прямолинейного канала. Перевозка груза сухопутным путем обходится втрое дороже, чем по каналу. Как следует двигаться, чтобы затраты на перевозку были минимальными, если известно, что расстояние между городами A и B равно 700 км, и они находятся в 100 км и 200 км от канала соответственно?
2. а) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + xy = 1, \\ xy(x + y) = -\frac{10}{9}. \end{cases}$$

б) Найдите значение параметра a , при котором сумма корней трехчлена $x^2 + (a + 1)ax + (a - 1)^2$ принимает наибольшее значение (для специальности математические методы в экономике).
3. Решите неравенство $\sqrt{4x^2 + 6x + 2} - \sqrt{4x^2 + 4x} > 2x + 2$.
4. Решите уравнение $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 + \cos x} = 1$.
5. Вершина A равностороннего треугольника ABC со стороной b лежит на окружности, касающейся стороны BC в ее середине. Найдите площадь части треугольника, лежащей внутри окружности.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2001 год
факультет международных отношений,
экономический факультет
(экономика и управление на предприятии, мировая экономика,
менеджмент организации (экономика))

Вариант 1

1. Двум трактористам было поручено вспахать три поля: A , B и C ; поле A на 60% больше поля B , а поле C на 37,5% меньше поля A . Первый тракторист вспахал 50% поля A и 40% поля B , а второй — все остальное. У кого из трактористов оплата труда должны быть больше и на сколько процентов?
2. Решите уравнение $1 + 3\sin 2x = 2\sin x + 3\cos x$.
3. Решите уравнение $\log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_3 \frac{25}{3x^2} + \log_2 5 = \log_x 5$.
4. Даны четыре числа, взятые в определенном порядке. При этом сумма 2-го и 3-го числа равна 12, а 1-го и 4-го — 14. Найдите эти числа, если известно, что первые три числа образуют арифметическую прогрессию, а три последние — геометрическую.
5. Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $\angle A = \alpha$, а $\angle C = \gamma$. Найдите угол между высотой и медианой, выходящими из вершины B .

Вариант 2

1. Два насоса наполняют четыре цистерны, 1-я из которых на 40% меньше 2-й, а 3-я и 4-я вместе — на $\frac{200}{3}\%$ меньше 1-й. За час работы 1-й насос наполняет 1-ю цистерну на 50% и 2-ю цистерну — на 70%, а 2-й насос за такое же время наполняет все остальное. У какого насоса мощность выше и на сколько процентов?
2. Решите уравнение $3\sin 2x + 2\cos x = 1 + 3\sin x$.
3. Решите уравнение $\log_5 \frac{5}{x} \cdot \log_3 \frac{3}{4x^2} + \log_x 2 = \log_5 2$.
4. Даны четыре числа, взятые в определенном порядке. При этом сумма первого и последнего из них равна 7, а сумма двух средних — 6. Найдите эти числа, если известно, что первые три числа образуют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую.
5. Дан треугольник ABC . Его площадь равна S , радиус вписанной окружности равен r , а $\angle A = \alpha$. Найдите длину стороны BC .

Вариант 1

1. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x + |y| = 1, \\ y + a|x| = 2 \end{cases}$ имеет 4 решения?
2. Решите неравенство $x\sqrt{\frac{1-x}{2}} > -1$.
3. Решите уравнение $\frac{1}{2} + \sin x + \sin 5x = \cos^2 x$.
4. Решите неравенство $\log_2 5x^2 + \log_x \sqrt{5}x > 0$.
5. Найдите площадь треугольника ABC , у которого $\angle A = \alpha$, радиус описанной окружности равен R , а высота, опущенная из вершины B , равна h .

Вариант 2

1. При каких значениях параметра b система $\begin{cases} |x| + y = 2, \\ x + b|y| = 3 \end{cases}$ имеет ровно 3 решения?
2. Решите неравенство $\frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{2x}} > -1$.
3. Решите уравнение $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 5x = \sin^2 x$.
4. Решите неравенство $\log_3 \frac{4}{3x} + \log_x 4 > 0$.
5. Найдите углы треугольника ABC , если известно, что его медиана и высота, проведенные из вершины A , делят $\angle A$ на три равные части.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления,
физический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 5 или 6.
2. Ответ: $\left\{ \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. а) Ответ: $\left(a; \frac{1-2a-\sqrt{1-8a}}{2} \right) \cup \left(\frac{1-2a+\sqrt{1-8a}}{2}; 1-a \right) \cup (1+a; +\infty)$.
б) Ответ: если $a \geq \frac{1}{2} : (1+a; +\infty)$; если $a < \frac{1}{2} : (a; 1-a) \cup (1+a; +\infty)$.
4. Ответ: $\frac{50\sqrt{3}}{21}, \frac{70\sqrt{3}}{21}, \frac{90\sqrt{3}}{21}$.
5. Ответ: $V = 2$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 8 или 16.
2. Ответ: $\left\{ \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. а) Ответ: $\left(0; \frac{1}{2} - a - \sqrt{\frac{1}{4} - a} \right) \cup \left(\frac{1}{2} - a + \sqrt{\frac{1}{4} - a}; 1-a \right) \cup (1; +\infty)$.
б) Ответ: если $a \geq 1 : (1; +\infty)$; если $a < 1 : (0; 1-a) \cup (1; +\infty)$.
4. Ответ: $\frac{25\sqrt{3}}{9}, \frac{30\sqrt{3}}{9}, \frac{35\sqrt{3}}{9}$.
5. Ответ: $V = 8$.

Биолого-почвенный факультет,
химический факультет,
филологический факультет
(теоретическая и прикладная лингвистика)

Ответы к варианту 1

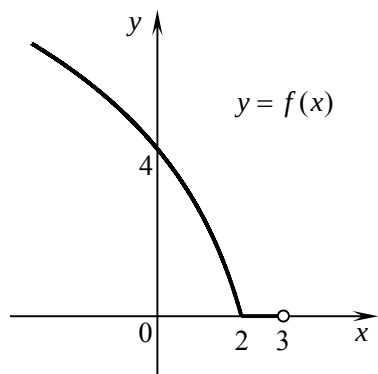
1. Ответ: $\{1\}$.
2. Ответ: $\left\{ \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. Ответ: $\left(3; \frac{9 + \sqrt{85}}{6} \right)$.
4. Ответ: $\frac{50\sqrt{3}}{21}, \frac{70\sqrt{3}}{21}, \frac{90\sqrt{3}}{21}$.
5. Ответ: 6 часов.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{\sqrt{2}\}$.
2. Ответ: $\left\{ \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. а) Ответ: $\left(4; 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$.
4. Ответ: $\frac{25\sqrt{3}}{9}, \frac{30\sqrt{3}}{9}, \frac{35\sqrt{3}}{9}$.
5. Ответ: $\frac{6}{7}$ часа.

Ответы к варианту 1

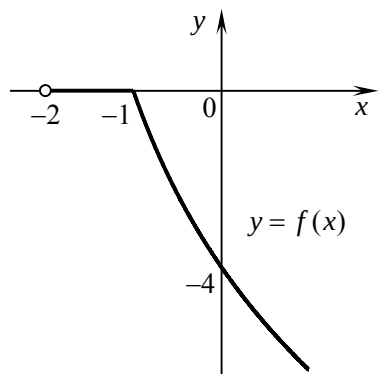
1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\{(\sqrt{2}; \sqrt{2})\}$.
3. Ответ: $\left(-\infty; 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
4. Ответ: $\{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.
5. Ответ: $\frac{2 + \pi}{3 + 2\sqrt{2}} a^2$.

Ответы к варианту 2

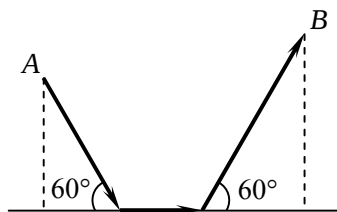
1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{\left(-\frac{1}{3}; 2\right); \left(2; -\frac{1}{3}\right)\right\}$.
3. Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$.
4. Ответ: $\{\pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.
5. Ответ: $\frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{32} b^2$.

Ответы к варианту 1

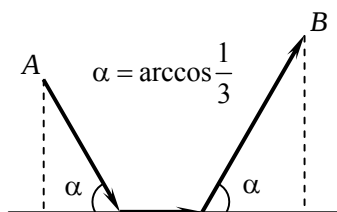
1. Ответ: см. рисунок.



2. а) Ответ: $\{(\sqrt{2}; \sqrt{2})\}$.
 б) Ответ: $a = 2 - \sqrt{6}$.
 3. Ответ: $\left(-\infty; 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
 4. Ответ: $\{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.
 5. Ответ: $\frac{2 + \pi}{3 + 2\sqrt{2}} a^2$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. а) Ответ: $\left\{\left(-\frac{1}{3}; 2\right); \left(2; -\frac{1}{3}\right)\right\}$.
 б) Ответ: $a = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$.
 3. Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$.
 4. Ответ: $\{\pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.
 5. Ответ: $\frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{32} b^2$.

Факультет международных отношений,
экономический факультет
(экономика и управление на предприятии, мировая экономика,
менеджмент организации (экономика))

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 100%.
2. Ответ: $\left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. Ответ: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; 2; 5 \right\}$.
4. Ответ: 12, 8, 4, 2 или $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}$.
5. Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sin(\alpha - \gamma)}{2 \sin \alpha \sin \gamma}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 25%.
2. Ответ: $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. Ответ: $\left\{ \frac{1}{2}; \sqrt{3}; 5 \right\}$.
4. Ответ: 1, 2, 4, 6 или $\frac{25}{4}, \frac{15}{4}, \frac{9}{4}, \frac{3}{4}$.
5. Ответ: $\frac{S}{r} - r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $a \in (2; +\infty)$.
2. Ответ: $(-1; 1]$.
3. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; (-1)^k \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{4} + \frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cup (1; +\infty)$.
5. Ответ: $\frac{h}{2} (h \operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha - h^2})$, если $\angle C \leq \frac{\pi}{2}$; $\frac{h}{2} (h \operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha - h^2})$, если $\angle C \geq \frac{\pi}{2}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $b = \frac{3}{2}$.
2. Ответ: $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$.
3. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \pm \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $\left(0; \frac{1}{3} \right) \cup (1; 4)$.
5. Ответ: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.