

Санкт-Петербургский государственный университет, 2004 год  
математико-механический факультет,  
факультет прикладной механики – процессов управления

Вариант 1

1. Определите число решений уравнения  $\sqrt{\frac{14x^2 - ax - a}{x-1}} = \sqrt{2x+a}$  в зависимости от параметра  $a$ .
2. Решите неравенство  $2\log_{x^2}\left(x - \frac{4}{x}\right) \leq \log_{2-x}(2+x)$ .
3. Решите уравнение  $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos 3x = \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4}$ .
4. Ребра  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  тетраэдра  $ABCD$  взаимно перпендикулярны, а луч  $AO$ , где  $O$  — центр вписанной в тетраэдр сферы, пересекает грань  $BCD$  в точке  $M$ . Найдите площадь треугольника  $BMC$ , если  $AB = 4$ ,  $AC = 5$  и площадь треугольника  $BCD$  равна  $\sqrt{141}$ .
5. Точка пересечения биссектрис треугольника делит одну из них в отношении 1:3. Наибольшая из его сторон равна 26. Радиус вписанной окружности равен 6. Найдите радиус описанной окружности.

Вариант 2

1. Определите число решений уравнения  $\sqrt{\frac{28x^2 + bx + 2b}{x-2}} = \sqrt{4x-b}$  в зависимости от параметра  $b$ .
2. Решите неравенство  $\log_x\left(x - \frac{4}{x}\right) \leq 2\log_{(2-x)^2}(2+x)$ .
3. Решите уравнение  $\cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin 3x = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4}$ .
4. Ребра  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  тетраэдра  $ABCD$  взаимно перпендикулярны, а луч  $AO$ , где  $O$  — центр вписанной в тетраэдр сферы, пересекает грань  $BCD$  в точке  $K$ . Найдите площадь треугольника  $BKD$ , если  $AB = 2$ ,  $AC = 4$  и площадь треугольника  $BCD$  равна  $\sqrt{61}$ .
5. Точка пересечения биссектрис треугольника делит одну из них в отношении 2:3. Наименьшая из его сторон равна 25. Радиус вписанной окружности равен 6. Найдите радиус описанной окружности.

**Санкт-Петербургский государственный университет, 2004 год**  
филологический факультет  
(теоретическая и прикладная лингвистика,  
прикладная информатика (в области искусств и гуманитарных наук))

**Вариант 1**

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система  $\begin{cases} ax^2 + 2y^2 = 1, \\ x^2 + (a+1)y^2 = a \end{cases}$  имеет решение.
2. Решите неравенство  $\sqrt{2x-x^3} \geq \sqrt{x^2 - \frac{8}{x+1}}$ .
3. Решите уравнение  $\cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = \sin^2 3x$ .
4. Решите уравнение  $\log_{3x}(1-x)^4 - \log_{9x}(1-x)^6 = \log_9(1-x)^2$ .
5. Прямая пересекает диагональ  $BD$  ромба  $ABCD$  в точке  $M$  и стороны  $AD$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Найдите площадь четырехугольника  $ABLK$ , если известно, что  $AB = 6$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $KM = 5$  и  $\frac{BM}{DM} = \frac{1}{2}$ .

**Вариант 2**

1. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых система  $\begin{cases} 3x^2 + (2-b)y^2 = 4, \\ bx^2 - y^2 = b+1 \end{cases}$  имеет решение.
2. Решите неравенство  $\sqrt{x^3 - 3x} \geq \sqrt{x^2 + \frac{10}{x-1}}$ .
3. Решите уравнение  $\cos 4x - \cos 6x + \cos 8x = \cos^2 3x$ .
4. Решите уравнение  $\log_x(2-x)^2 - \log_{4x}(2-x)^4 = \log_8(2-x)^2$ .
5. Прямая пересекает диагональ  $AC$  ромба  $ABCD$  в точке  $N$  и стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Найдите площадь четырехугольника  $APQD$ , если известно, что  $AB = 5$ ,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $PN = 4$  и  $\frac{AN}{CN} = \frac{3}{2}$ .

**Вариант 1**

1. Несколько косцов подрядились выкосить луг, и выполнили бы работу за 8 часов, если бы косили все одновременно. Вместо этого они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый косил до окончания всей работы. За какое время был выкошен луг, если косец, приступивший к работе первым, проработал в 7 раз дольше, чем последний?
2. Решите уравнение  $\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + \sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{6}$ .
3. Решите уравнение  $\log_3^2 x + \log_x^2 27 = \sqrt{3} \log_3(2 \cdot 3^{\sqrt{3}} x - x^2)$ .
4. Решите неравенство  $x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 1$ .
5. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  все углы равны  $120^\circ$ . Найдите длины сторон  $AB$  и  $BC$ , если известно, что  $CD = a$ ,  $DE = b$ ,  $EF = c$ ,  $AF = d$ .

**Вариант 2**

1. Бригада маляров взялась красить забор. Начав покраску одновременно и некоторое время проработав вместе, маляры один за другим через равные промежутки времени стали покидать работу. Через 10 часов, к моменту ухода последнего, половина забора была покрашена. За какое время маляры выкрасили бы весь забор, работая вместе, если известно, что ушедший последним проработал в 5 раз дольше ушедшего первым?
2. Решите уравнение  $\sqrt{3}(\cos x - \sin x) + \sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{6}$ .
3. Решите уравнение  $\log_2^2 x + \log_x^2 4 = \sqrt{2} \log_2(2 \cdot 2^{\sqrt{2}} x - x^2)$ .
4. Решите неравенство  $1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > x$ .
5. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  все углы равны  $120^\circ$ . Найдите длины сторон  $AB$  и  $CD$ , если известно, что  $BC = a$ ,  $DE = b$ ,  $EF = c$ ,  $AF = d$ .

Санкт-Петербургский государственный университет, 2004 год  
биолого-почвенный факультет  
(экология)

Вариант 1

1. Решите уравнение  $\cos^2 2x - 2 \sin 2x = -\frac{2}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ .
2. Решите уравнение  $\log_5(2x+1) + 3 = \log_5(2x-29)^2$ .
3. Сколько корней имеет уравнение  $1 - a = |2 - |3 - |x||$  в зависимости от параметра  $a$ ?
4. В треугольнике  $ABC$  известны длины сторон:  $AB = 9$ ,  $BC = 11$ ,  $AC = 8$ . Вписанная окружность касается стороны  $AC$  в точке  $D$ . Найдите длину  $BD$ .
5. В правильной треугольной пирамиде  $SPQR$  сторона основания равна  $\sqrt{2}$ , а боковое ребро равно  $\sqrt{5}$ . На боковых ребрах  $SP$ ,  $SQ$ ,  $SR$  взяты соответственно точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  так, что  $\frac{SA}{AP} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{SB}{BQ} = \frac{3}{1}$ ,  $\frac{SC}{CR} = \frac{1}{1}$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

Вариант 2

1. Решите уравнение  $3 \sin 2x - \cos^2 2x = \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$ .
2. Решите уравнение  $\log_7(2x-1) + 2 = \log_7(2x-9)^2$ .
3. Сколько корней имеет уравнение  $3 - b = ||2|x| - 1| - 2|$  в зависимости от параметра  $b$ ?
4. Вписанная окружность касается стороны  $PQ$  треугольника  $PQR$  в точке  $F$ , причем  $PF = 6$ ,  $FQ = 10$ ,  $\angle PQR = \arccos \frac{1}{6}$ . Найдите длины сторон треугольника.
5. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания равна 1, а боковое ребро равно  $\sqrt{5}$ . На боковых ребрах  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  взяты соответственно точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  так, что  $\frac{SP}{PA} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{SQ}{QB} = \frac{2}{1}$ ,  $\frac{SR}{RC} = \frac{1}{1}$ . Найдите площадь треугольника  $PQR$ .

**Санкт-Петербургский государственный университет, 2004 год**  
химический факультет,  
факультет менеджмента  
(государственное и муниципальное управление)

**Вариант 1**

1. Отношение суммы первых трех членов бесконечной возрастающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих семи членов равно 7:3. Найдите разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно  $-\frac{7}{4}$ .
2. Решите уравнение  $\cos 4x = 1 - 3\cos x$ .
3. Решите уравнение  $\log_{(x-1)^2}(\sqrt{x+3}-1) = \frac{1}{4}$ .
4. Изобразите на координатной плоскости  $Oxy$  множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $x^2 + y \leq |x - y|$ .
5. К вписанной окружности треугольника  $ABC$  проведены три касательные, не содержащие сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , но параллельные им. Радиусы описанных окружностей треугольников, отсекаемых этими касательными от треугольника  $ABC$  равны  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ . Найдите радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Вариант 2**

1. Отношение суммы первых четырех членов бесконечной убывающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих шести членов равно 3:2. Найдите разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно  $-\frac{9}{4}$ .
2. Решите уравнение  $\cos 4x = 1 + 3\sin x$ .
3. Решите уравнение  $\log_{x^2}(3 - \sqrt{x+5}) = \frac{1}{4}$ .
4. Изобразите на координатной плоскости  $Oxy$  множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $x^2 - y \geq |y - x|$ .
5. К вписанной окружности треугольника  $ABC$  проведены три касательные, не содержащие сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , но параллельные им. Радиусы вписанных окружностей треугольников, отсекаемых этими касательными от треугольника  $ABC$  равны  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ . Найдите радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Вариант 1**

1. Изобразите на координатной плоскости  $Oxy$  множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству  $x^2 - y = |x| + |y|$ .
2. Решите уравнение  $x\sqrt{\frac{x+3}{x}} = (2-x)\sqrt{\frac{2x-6}{x-2}}$ .
3. Решите уравнение  $\sin\left(\pi\cos^2 x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi\cos 2x)$ .
4. Решите уравнение  $\log_{3x}(1-x)^4 - \log_{9x}(1-x)^6 = \log_9(1-x)^2$ .
5. Прямая пересекает диагональ  $BD$  ромба  $ABCD$  в точке  $M$  и стороны  $AD$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Найдите площадь четырехугольника  $ABLK$ , если известно, что  $AB = 6$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $KM = 5$  и  $\frac{BM}{DM} = \frac{1}{2}$ .

**Вариант 2**

1. Изобразите на координатной плоскости  $Oxy$  множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству  $x^2 + y = |x| - |y|$ .
2. Решите уравнение  $x\sqrt{\frac{x+1}{x}} = (4-x)\sqrt{\frac{2x-7}{x-4}}$ .
3. Решите уравнение  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin^2 x\right) = \cos\left(\pi\cos 2x - \frac{\pi}{8}\right)$ .
4. Решите уравнение  $\log_x(2-x)^2 - \log_{4x}(2-x)^4 = \log_8(2-x)^2$ .
5. Прямая пересекает диагональ  $AC$  ромба  $ABCD$  в точке  $N$  и стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Найдите площадь четырехугольника  $APQD$ , если известно, что  $AB = 5$ ,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $PN = 4$  и  $\frac{AN}{CN} = \frac{3}{2}$ .

**Санкт-Петербургский государственный университет, 2004 год**  
экономический факультет  
(экономическая теория, мировая экономика,  
экономика и управление на предприятии, менеджмент организации,  
бухгалтерский учет, анализ и аудит, финансы и кредит, экономика)

**Вариант 1**

1. Несколько косцов подрядились выкосить луг, и выполнили бы работу за 8 часов, если бы косили все одновременно. Вместо этого они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый косил до окончания всей работы. За какое время был выкошен луг, если косец, приступивший к работе первым, проработал в 7 раз дольше, чем последний?
2. Решите уравнение  $\cos x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2x$ .
3. Решите уравнение  $\log_3^2 x + \log_x^2 27 = \sqrt{3} \log_3(2 \cdot 3^{\sqrt{3}} x - x^2)$ .
4. Решите неравенство  $\sqrt{x+1} \cdot \left(\frac{1}{x^2} - x\right) > \frac{1}{x} - x - 1$ .
5. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  все углы равны  $120^\circ$ . Найдите длины сторон  $AB$  и  $BC$ , если известно, что  $CD = a$ ,  $DE = b$ ,  $EF = c$ ,  $AF = d$ .

**Вариант 2**

1. Бригада маляров взялась красить забор. Начав покраску одновременно и некоторое время проработав вместе, маляры один за другим через равные промежутки времени стали покидать работу. Через 10 часов, к моменту ухода последнего, половина забора была покрашена. За какое время маляры выкрасили бы весь забор, работая вместе, если известно, что ушедший последним проработал в 5 раз дольше ушедшего первым?
2. Решите уравнение  $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2x = 1$ .
3. Решите уравнение  $\log_2^2 x + \log_x^2 4 = \sqrt{2} \log_2(2 \cdot 2^{\sqrt{2}} x - x^2)$ .
4. Решите неравенство  $\sqrt{x+3} \cdot \left(\frac{1}{x^2} - x\right) < \frac{1}{x} - x - 3$ .
5. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  все углы равны  $120^\circ$ . Найдите длины сторон  $AB$  и  $CD$ , если известно, что  $BC = a$ ,  $DE = b$ ,  $EF = c$ ,  $AF = d$ .

**Санкт-Петербургский государственный университет, 2004 год**  
факультет международных отношений  
(прикладная информатика (в гуманитарной сфере))

**Вариант 1**

1. Решите уравнение  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} - \frac{2 \cos x}{1 + \cos x} = 1$ .
2. Решите неравенство  $x + 7 > 6\sqrt[3]{x - 2}$ .
3. Решите неравенство  $\log_{1-x} \frac{5 - 3x}{4x} > 0$ .
4. Продолжения биссектрис углов при вершинах  $P$  и  $Q$  треугольника  $PQR$  пересекает описанную окружность в точках  $P'$  и  $Q'$  соответственно. Найдите  $P'Q'$ , если  $PQ = 6$ , а радиус описанной окружности равен 5.
5. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $a \cdot 2^x - 2^{1-x} - 4a = 0$  имеет два различных положительных корня.

**Вариант 2**

1. Решите уравнение  $\frac{2 \sin x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1$ .
2. Решите неравенство  $x + 5 \leq 3\sqrt{x + 3}$ .
3. Решите неравенство  $\log_x \frac{5 - 2x}{1 - x} < 0$ .
4. Продолжения высот треугольника  $ABC$ , опущенных из вершин  $A$  и  $B$ , пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках  $A'$  и  $B'$  соответственно. Найдите  $AB$ , если  $A'B' = 12$ , а радиус описанной окружности равен 10.
5. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых уравнение  $3b\sqrt{x + 4} = bx + 4b + 1$  имеет два различных отрицательных корня.

**Санкт-Петербургский государственный университет, 2004 год**  
факультет менеджмента  
(финансовый менеджмент)

**Вариант 1**

1. Отношение суммы первых трех членов бесконечной возрастающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих семи членов равно 7:3. Найдите разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно  $-\frac{7}{4}$ .
2. Решите уравнение  $2 \cos 2x + 2 \cos x + \frac{5}{4} = \sin 2x$ .
3. Решите уравнение  $\sqrt{\frac{1}{2} + x} - \sqrt{\frac{1}{2} - x} = \sqrt[3]{x^2} - 1$ .
4. Изобразите на координатной плоскости  $Oxy$  множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $x^2 + y \leq |x - y|$ .
5. К вписанной окружности треугольника  $ABC$  проведены три касательные, не содержащие сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , но параллельные им. Радиусы описанных окружностей треугольников, отсекаемых этими касательными от треугольника  $ABC$  равны  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ . Найдите радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Вариант 2**

1. Отношение суммы первых четырех членов бесконечной убывающей арифметической прогрессии к сумме ее последующих шести членов равно 3:2. Найдите разность прогрессии, если известно, что у нее имеются два соседних члена, произведение которых равно  $-\frac{9}{4}$ .
2. Решите уравнение  $2 \cos 2x + 2 \sin x - \frac{5}{4} = \sin 2x$ .
3. Решите уравнение  $\sqrt{2 + \frac{x}{2}} - \sqrt{2 - \frac{x}{2}} = 2 - \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2}$ .
4. Изобразите на координатной плоскости  $Oxy$  множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $x^2 - y \geq |y - x|$ .
5. К вписанной окружности треугольника  $ABC$  проведены три касательные, не содержащие сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , но параллельные им. Радиусы вписанных окружностей треугольников, отсекаемых этими касательными от треугольника  $ABC$  равны  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ . Найдите радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Вариант 1**

1. Найдите все конечные целочисленные арифметические прогрессии, обладающие следующим свойством: число 252 является ее последним членом и сумма четырех первых членов равна сумме двух последних членов.
2. Решите уравнение  $\sqrt{x^2 + 6} - \sqrt{x^2 + 16} - x = 0$ .
3. Решите неравенство  $\frac{x-1}{\log_2(x+2)} \leq \frac{|x-1|}{3}$ .
4. Решите уравнение  $\cos 2x - \cos 4x = \frac{1}{2} + \sin x$ .
5. Найдите площадь четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность, если известно, что  $AB = AC = 15$ ,  $BD = 13$ ,  $CD = 5$ .

**Вариант 2**

1. Найдите все конечные целочисленные арифметические прогрессии, обладающие следующим свойством: сумма ее первых десяти членов равна сумме пяти последних членов и равна 1000.
2. Решите уравнение  $\sqrt{x^2 - 5} + \sqrt{10 - x^2} + x = 0$ .
3. Решите неравенство  $\frac{x-2}{\log_3(x+1)} \leq \frac{|x-2|}{2}$ .
4. Решите уравнение  $\cos 2x + \cos 4x = -\frac{1}{2} - \cos x$ .
5. Найдите площадь четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность, если известно, что  $AB = 5$ ,  $AC = CD = 10$ ,  $BD = 11$ .

### Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,  
факультет прикладной механики – процессов управления

#### Ответы к варианту 1

1. Ответ: если  $a \in (-\infty; 0)$ : нет решений; если  $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right) \cup \{1; 7\}$ : 1 решение,

если  $a \in \left[\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 7) \cup (7; +\infty)$ : 2 решения.

2. Ответ:  $(-2; -\sqrt{3}] \cup (-1; 0)$ .

3. Ответ:  $\left\{\frac{\pi}{12} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

4. Ответ: площадь треугольника  $BMC$  равна  $\frac{10\sqrt{141}}{19}$ .

5. Ответ: радиус описанной окружности равен  $\frac{325}{24}$ .

#### Ответы к варианту 2

1. Ответ: если  $b \in (0; +\infty)$ : нет решений; если  $b \in (-1; 0] \cup \{-28; -4\}$ : 1 решение,  
если  $b \in (-\infty; -28) \cup (-28; -4) \cup (-4; -1]$ : 2 решения.

2. Ответ:  $(2; \sqrt{5}] \cup (3; +\infty)$ .

3. Ответ:  $\left\{\frac{\pi}{12} + \pi k; -\frac{\pi}{24} \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

4. Ответ: площадь треугольника  $BMD$  равна  $\frac{3\sqrt{61}}{13}$ .

5. Ответ: радиус описанной окружности равен  $\frac{565}{6}$ .

**Ответы к варианту 1**

1. Ответ:  $a \in (-\infty; -2) \cup \{1\}$ .
2. Ответ:  $\left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right]$ .
3. Ответ:  $\left\{\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3+\sqrt{17}}{8} + \pi k; \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3-\sqrt{17}}{8} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .
4. Ответ:  $\left\{\frac{1}{243}; 2\right\}$ .
5. Ответ: площадь четырехугольника  $ABLK$  равна  $\frac{3\sqrt{3}}{4}(10-\sqrt{13})$ .

**Ответы к варианту 2**

1. Ответ:  $b \in (-\infty; -2] \cup \{3\}$ .
2. Ответ:  $\left[\frac{1+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$ .
3. Ответ:  $\left\{\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-3-\sqrt{17}}{8} + \pi k; \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{17}-3}{8} + \pi k; \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .
4. Ответ:  $\left\{\frac{1}{64}; 3\right\}$ .
5. Ответ: площадь четырехугольника  $APQD$  равна  $\frac{5\sqrt{3}}{24}(33+\sqrt{37})$ .

**Ответы к варианту 1**

1. Ответ: луг был выкошен за 14 часов.
2. Ответ:  $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k; -\frac{\pi}{12} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
3. Ответ:  $\{3^{\sqrt{3}}\}$ .
4. Ответ:  $\left( \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}; 1 \right)$ .
5. Ответ:  $AB = a + b - d$ ,  $BC = c + d - a$  (при  $d \geq a + b$  или  $a \geq c + d$  задача не имеет решений).

**Ответы к варианту 2**

1. Ответ: забор был выкрашен за 12 часов.
2. Ответ:  $\left\{ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{12} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
3. Ответ:  $\{2^{\sqrt{2}}\}$ .
4. Ответ:  $\left( \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}; 1 \right)$ .
5. Ответ:  $AB = b + c - a$ ,  $CD = c + d - a$  (при  $a \geq b + c$  или  $a \geq c + d$  задача не имеет решений).

**Ответы к варианту 1**

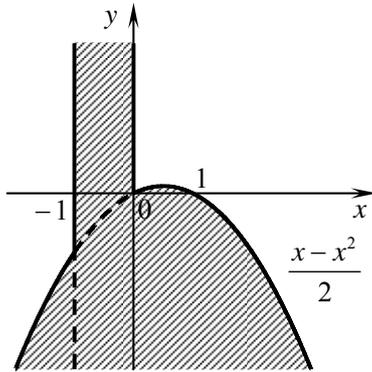
1. Ответ:  $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .
2. Ответ:  $\left\{2; \frac{179}{2}\right\}$ .
3. Ответ: если  $a \in (1; +\infty)$  : нет решений; если  $a \in (-\infty; -1)$  : 2 решения; если  $a = \pm 1$  : 4 решения; если  $a \in (-1; 0)$  : 6 решений; если  $a = 0$  : 7 решений; если  $a \in (0; 1)$  : 8 решений.
4. Ответ:  $BD = 9$ .
5. Ответ: площадь треугольника  $ABC$  равна  $\frac{3\sqrt{17}}{32}$ .

**Ответы к варианту 2**

1. Ответ:  $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .
2. Ответ:  $\left\{1; \frac{65}{2}\right\}$ .
3. Ответ: если  $b \in (3; +\infty)$  : нет решений; если  $b \in (-\infty; 1) \cup \{3\}$  : 2 решения; если  $b \in (2; 3) \cup \{1\}$  : 4 решения; если  $b = 2$  : 5 решений; если  $b \in (1; 2)$  : 6 решений.
4. Ответ:  $PQ = 16$ ,  $QR = 22$ ,  $PR = 18$ .
5. Ответ: площадь треугольника  $PQR$  равна  $\frac{\sqrt{187}}{72}$ .

**Ответы к варианту 1**

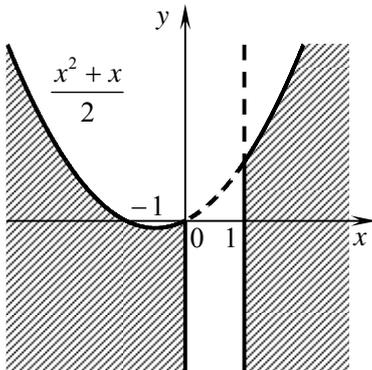
1. Ответ: разность прогрессии равна 4.
2. Ответ:  $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pm \arccos \frac{\sqrt{13}-1}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
3. Ответ:  $\left\{ \frac{13}{4}; \frac{\sqrt{7}-2}{2} \right\}$ .
4. Ответ: см. рисунок.



5. Ответ: радиус описанной окружности равен  $R_1 + R_2 + R_3$ .

**Ответы к варианту 2**

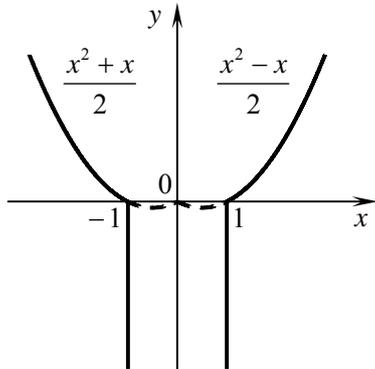
1. Ответ: разность прогрессии равна  $-3$ .
2. Ответ:  $\left\{ \pi k; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^k \arcsin \frac{1-\sqrt{13}}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
3. Ответ:  $\left\{ -4; \frac{4}{9} \right\}$ .
4. Ответ: см. рисунок.



5. Ответ: радиус вписанной окружности равен  $r_1 + r_2 + r_3$ .

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ:  $\{1\}$ .

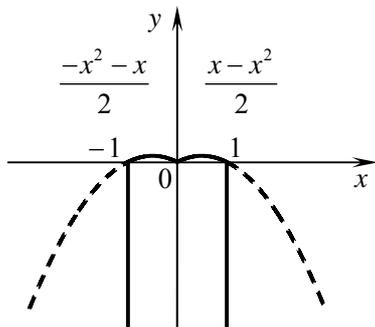
3. Ответ:  $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + \pi k; \pm \arccos \frac{\sqrt{21}}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

4. Ответ:  $\left\{ \frac{1}{243}; 2 \right\}$ .

5. Ответ: площадь четырехугольника  $ABLK$  равна  $\frac{3\sqrt{3}}{4}(10 - \sqrt{13})$ .

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ:  $\{2\}$ .

3. Ответ:  $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \arccos \frac{3}{\sqrt{20}} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

4. Ответ:  $\left\{ \frac{1}{64}; 3 \right\}$ .

5. Ответ: площадь четырехугольника  $APQD$  равна  $\frac{5\sqrt{3}}{24}(33 + \sqrt{37})$ .

**Ответы к варианту 1**

1. Ответ: луг был выкошен за 14 часов.
2. Ответ:  $\left\{2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .
3. Ответ:  $\{3^{\sqrt{3}}\}$ .
4. Ответ:  $[-1; 0) \cup \left(0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ .
5. Ответ:  $AB = a + b - d$ ,  $BC = c + d - a$  (при  $d \geq a + b$  или  $a \geq c + d$  задача не имеет решений).

**Ответы к варианту 2**

1. Ответ: забор был выкрашен за 12 часов.
2. Ответ:  $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .
3. Ответ:  $\{2^{\sqrt{2}}\}$ .
4. Ответ:  $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$ .
5. Ответ:  $AB = b + c - a$ ,  $CD = c + d - a$  (при  $a \geq b + c$  или  $a \geq c + d$  задача не имеет решений).

**Ответы к варианту 1**

1. Ответ:  $\left\{ \operatorname{arctg} 2 + \pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
2. Ответ:  $(-25; +\infty)$ .
3. Ответ:  $\left( \frac{5}{7}; 1 \right)$ .
4. Ответ:  $P'Q'$  равно  $\sqrt{10}$  или  $3\sqrt{10}$ .
5. Ответ:  $a \in \left( -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right)$ .

**Ответы к варианту 2**

1. Ответ:  $\left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k; \pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
2. Ответ:  $(-\infty; -11] \cup \{-2\}$ .
3. Ответ:  $(0; 1) \cup \left( \frac{5}{2}; 4 \right)$ .
4. Ответ:  $AB$  равно  $2\sqrt{10}$  или  $6\sqrt{10}$ .
5. Ответ:  $b \in \left( \frac{4}{9}; \frac{1}{2} \right)$ .

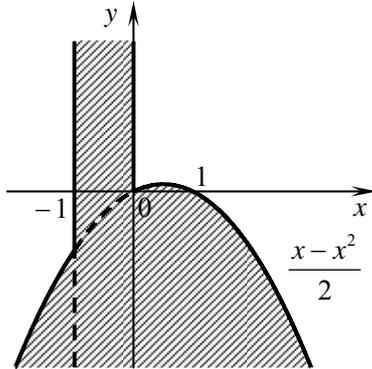
Ответы к варианту 1

1. Ответ: разность прогрессии равна 4.

2. Ответ:  $\left\{ \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi k; -\arctg 3 + (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{2\sqrt{10}} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

3. Ответ:  $\{-\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^3}\}$ .

4. Ответ: см. рисунок.



5. Ответ: радиус описанной окружности равен  $R_1 + R_2 + R_3$ .

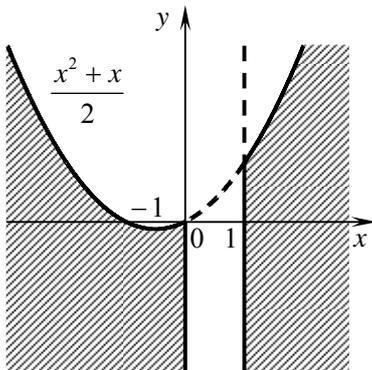
Ответы к варианту 2

1. Ответ: разность прогрессии равна  $-3$ .

2. Ответ:  $\left\{ -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \pi k; \arctg \frac{1}{3} + (-1)^k \arcsin \frac{1}{2\sqrt{10}} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

3. Ответ:  $\{8\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^3}\}$ .

4. Ответ: см. рисунок.



5. Ответ: радиус вписанной окружности равен  $r_1 + r_2 + r_3$ .

**Ответы к варианту 1**

1. Ответ:  $a_1 = 28$ ,  $d = 56$  или  $a_1 = 84$ ,  $d = 24$ , где  $a_1$  — первый член прогрессии,  $d$  — ее разность.
2. Ответ:  $\{-\sqrt{2}\}$ .
3. Ответ:  $\left(-2; -\frac{15}{8}\right] \cup (-1; 1] \cup [6; +\infty)$ .
4. Ответ:  $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$  или  $\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{7} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 7\right\}$ .
5. Ответ: площадь  $ABCD$  равна  $\frac{195}{2}$ .

**Ответы к варианту 2**

1. Ответ:  $a_1 = -80$ ,  $d = 40$  или  $a_1 = 64$ ,  $d = 8$ , где  $a_1$  — первый член прогрессии,  $d$  — ее разность.
2. Ответ:  $\{-3; -\sqrt{5}\}$ .
3. Ответ:  $\left(-1; -\frac{8}{9}\right] \cup (0; 2] \cup [8; +\infty)$ .
4. Ответ:  $\left\{\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$  или  $\left\{\frac{2\pi n}{7} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 7\right\}$ .
5. Ответ: площадь  $ABCD$  равна 55.